Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2012

Übungen zur Analysis I

– Blatt 8 –

Abgabe: Dienstag, den 12.06.2012, 12:00 – 12:10 Uhr, HG 4

Aufgabe 8.1. (12 Punkte)
Beweise die folgenden Aussagen:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es Polynome $P_n, Q_n \in \mathbb{R}[x]$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(nx) = P_n(\cos(x)), \qquad \sin(nx) = \sin(x)Q_n(\cos(x))$$

(ii) Für die Polynome Q_n aus Teil (i) gilt

$$|Q_n(x)| \leqslant n \qquad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

Hinweis: Verwende ohne Beweis, dass $\cos((0, \pi)) = (-1, 1)$ gilt, und dass die Sinusfunktion in $(0, \pi)$ keine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 8.2. (12 Punkte)
Zeige, dass folgende Produktreihen konvergieren und bestimme jeweils den Grenzwert.

$$\text{(i)} \quad \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^k}{k}\right)$$

Aufgabe 8.3. (12 Punkte)
Untersuche die folgenden Mengen auf Beschränktheit nach oben und bestimme gegebenenfalls das Supremum. Welche dieser Suprema sind Maxima?

(i) $M = \{1 - \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1\}$

(ii) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^3}{(x+2)^2} > 1,\ x \neq -2\}$

(iii) $M = \{\frac{x}{|x+3|} \mid x \in \mathbb{R},\ x \neq -3\}$

Aufgabe 8.4.*
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Die komplexen Zahlen

$$\zeta_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right) \in \mathbb{C} \qquad k \in \{0, \ldots, n-1\}$$

heißen n-te Einheitswurzeln. Zeige, dass gilt:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \zeta_k} = \frac{n-1}{2} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \zeta_k) = n$$

Hinweis: Untersuche für Teil (i) die ζ_k^{-1} und für Teil (ii) die Polynome $z^n - 1 \in \mathbb{C}[z]$ und $\prod_{k=0}^{n-1} (z - \zeta_k) \in \mathbb{C}[z]$.