Alternative Lösung zu 1.4. mit Mitteln der Algebra

Wegen $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n < \infty$ folgt die Aussage der Aufgabe ganz aus der

Behauptung:

Ist $\mathbb{R} \subset L$ eine Körpererweiterung mit $\dim_{\mathbb{R}} L < \infty$, dann gilt: $L \cong \mathbb{R}$ oder $L \cong \mathbb{C}$.

Beweis:

- $\dim_{\mathbb{R}} L < \infty \Rightarrow \mathbb{R} \subset L$ ist endliche Erweiterung

  $\Rightarrow \mathbb{R} \subset L$ ist algebraische Erweiterung.

  Sei $\overline{L}$ ein algebraischer Abschluss von L.

  $\Rightarrow L \subset \overline{L}$ ist algebraisch und damit wegen $\mathbb{R} \subset L$ algebraisch:

  $\mathbb{R} \subset \overline{L}$ ist algebraische Erweiterung.

  Da $\overline{L}$ ferner algebraisch abgeschlossen ist, ist $\overline{L}$ auch ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{R}$.

- Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist aber auch $\mathbb{C}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \exists$ Körperisomorphismus $f: \overline{L} \longrightarrow \mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$.

(denn: algebraischer Abschluss ist bis auf Isomorphie eindeutig.)

Wir betrachten den zu L isomorphen Zwischenkörper $f(L)$:

$$\mathbb{R} \subset f(L) \subset \mathbb{C}$$

Wegen $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ (Primzahl!) folgt aus dem Gradsatz:

$$[f(L) : \mathbb{R}] = 1 \quad \text{oder} \quad [f(L) : \mathbb{R}] = 2$$

$$\Rightarrow \quad f(L) = \mathbb{R} \qquad \text{oder} \quad f(L) = \mathbb{C}.$$

Da aber $f|_L : L \to f(L)$ ein Körperisomorphismus über $\mathbb{R}$ ist, folgt:

$$L \cong f(L) = \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad L \cong f(L) = \mathbb{C}.$$

$\blacksquare$