Bemerkung zur Anwendung des Fundamentalsatzes der Algebra in der Lösung von Aufgabe 1.4.

Am Ende der Lösung wählen wir zu $p \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}$ beliebig ein Polynom $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ mit $P(p) = 0$ und wenden den Fundamentalsatz der Algebra an:

$$P(X) = (X - a_1) \cdot \ldots \cdot (X - a_m) \quad \text{für gewisse } a_k \in \mathbb{C} = \mathrm{Span}(1,\upsilon).$$

Hier stellt sich die Frage, warum wir die a_k aus $\mathrm{Span}(1,\upsilon) \subset \mathbb{R}^n$ wählen können. Diese Frage hängt eng damit zusammen, dass wir $\mathrm{Span}(1,\upsilon)$ als „Modell für $\mathbb{C}$" bezeichnet haben. Wir geben zwei Antworten.

(1) Direkte, technische Antwort

Wir verwenden den Körperisomorphismus

$$f: \mathbb{C} \to \mathrm{Span}(1,\upsilon), \quad x + iy \mapsto x + \upsilon y$$

aus der Lösung der Aufgabe. Zunächst schreiben wir

$$P = \sum_{k=0}^{m} \mu_k X^k \quad \text{für Koeffizienten } \mu_k \in \mathbb{R}$$

und zerlegen P mit dem Fundamentalsatz der

Algebra über $\mathbb{C}$:

$$P = \prod_{k=1}^{m} (X - b_k) \quad \text{für gewisse } b_k \in \mathbb{C}.$$

Wir definieren nun das Polynom

$$Q := \prod_{k=1}^{m} (X - f(b_k)) \in \operatorname{Span}(1,v)[X],$$

d.h. ein Polynom mit Koeffizienten aus dem Körper Span $(1,v)$.

Ausmultiplizieren von $P = \prod_{k=1}^{m} (X - b_k)$ ergibt:

$$\sum_{k=0}^{m} \mu_k X^k = P = \prod_{k=1}^{m} (X - b_k) \overset{\text{ausmultiplizieren}}{=} \sum_{k=0}^{m} s_k X^k$$

mit $\mu_m = s_m = 1$

$$\mu_{m-1} = s_{m-1} = (-b_1) + \dots + (-b_m)$$

$$\mu_{m-2} = s_{m-2} = b_1 b_2 + b_1 b_3 + \dots + b_{m-1} b_m$$

$$\vdots$$

$$\mu_0 = s_0 = (-1)^m b_1 \cdot \ldots \cdot b_m$$

Analog können wir Q ausmultiplizieren:

$$Q = \prod_{k=1}^{m} (X - f(b_k)) = \sum_{k=0}^{m} t_k X^k$$

mit

$$\begin{aligned} t_m &= 1 = f(1) & &= f(s_m) \\ t_{m-1} &= (-f(b_1)) + \dots + (-f(b_m)) & & \\ &= f((-b_1) + \dots + (-b_m)) & &= f(s_{m-1}) \\ &\vdots & & \\ t_0 &= (-1)^m f(b_1) \cdot \ldots \cdot f(b_m) & & \\ &= f((-1)^m b_1 \cdot \ldots \cdot b_m) & &= f(s_0) \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass gilt:

$$t_k = f(s_k) = f(\underset{\in \mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{\mu_k}}) = \mu_k \qquad \forall \; 0 \leq k \leq m$$

wobei wir verwendet haben, dass f ein Isomorphismus von Körpern ist, d.h. mit $\cdot$ und $+$ verträglich ist, und dass $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ gilt.

Damit folgt aber: $Q = \sum_{k=0}^{m} t_k X^k = \sum_{k=0}^{m} \mu_k X^k$

$= P.$

Fazit: Wir haben aus einer Zerlegung von P in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$ vermöge des Isomorphismus f eine Zerlegung in Linearfaktoren über dem Körper Span(1,0) konstruiert und genau eine solche Zerlegung benötigen wir in der Lösung der Aufgabe!

(2) Antwort von einem höheren Standpunkt

- Wir holen etwas aus und stellen die Frage, was die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ „sind". In der Literatur findet man ausgehend von $\mathbb{Q}$ verschiedene Ansätze die reellen Zahlen zu konstruieren, z.B.
  - mit Dedekindschen Schnitten
  - als Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ modulo Nullfolgen in $\mathbb{Q}$
  - als Äquivalenzklassen von Intervallschachtelungen rationaler Zahlen
  - ...

Jede dieser Konstruktionen liefert eine andere Menge welche dann als $\mathbb{R}$ definiert wird und auf der dann die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ erklärt werden.

<u>Wesentlicher Punkt:</u> Aus Sicht der Mengenlehre liefert jede Konstruktion eine andere Menge die dann $\mathbb{R}$ genannt wird. Wo liegt dann der Bezug zwischen diesen Konstruktionen?

Für alle diese Konstruktionen beweist man die folgenden Eigenschaften:

(i) Es entsteht ein Körper K

(ii) Der Körper K trägt eine Anordnung

(iii) Die Anordnung genügt dem archimedischen Axiom

(iv) Der Körper ist vollständig.

Außerdem kann man beweisen: Sind K und L zwei Körper welche die Eigenschaften (i)–(iv) besitzen, dann gibt es einen Körperisomorphismus

$$g : K \to L.$$

Also gibt es bis auf Isomorphie genau einen Körper welcher die Eigenschaften (i) - (iv) besitzt und „diesen" nennt man die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Jede der verschiedenen Konstruktionen liefert dann ein „mengentheoretisches Modell" für die reellen Zahlen.

<u>Fazit:</u> Praktisch gesehen spielt es keine Rolle auf welche Weise man $\mathbb{R}$ als Menge konstruiert. <u>Alle</u> Eigenschaften der reellen Zahlen ergeben sich <u>alleine</u> aus (i) - (iv). In diesem Sinne ist die Vorlesung „Analysis I" das Studium der Eigenschaften (i) - (iv).

- In genau demselben Sinne müssen die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ betrachtet werden. Als Menge können sie auf viele Arten konstruiert werden, z.B.
  - $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ mit konkret definierten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ (vgl. Vorlesung)
  - $\mathbb{C} := \mathbb{R}[X] / (X^2+1)$ algebraische Konstruktion
  - ...

Auch hier gilt wieder: Es spielt keine Rolle wie $\mathbb{C}$ als Menge konstruiert wird, wichtig sind die axiomatischen Eigenschaften, die den Körper bis auf Isomorphie festlegen. Im Falle von $\mathbb{C}$ sind dies:

(a) K ist ein Körper mit $\mathbb{R} \subset K$

(b) Jedes Element $p \in K$ ist Nullstelle eines Polynoms $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$

(c) Jedes Polynom $Q \in K[X]$ mit Koeffizienten aus K und mit Grad $Q > 0$ zerfällt in Linearfaktoren aus K.

Man kann diese Eigenschaften abschwächen, d.h. äquivalent dazu ist

(a') K ist ein Körper mit $\mathbb{R} \subset K$ und $\dim_{\mathbb{R}} K < \infty$

(c') Das Polynom $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ besitzt in K eine Nullstelle, d.h. es gibt ein Element $\upsilon \in K$ mit $\upsilon^2 = -1$.

Alle Körper mit diesen Eigenschaften sind „ein Modell" der komplexen Zahlen im mengentheoretischen Sinne.

Für die Fragestellung zu Beginn ist daher klar:

Da wir ein ι mit $\iota^2 = -1$ konstruiert haben, ist der Körper $\mathrm{Span}(1,\iota)$ ein mengentheoretisches Modell der komplexen Zahlen.

$\Rightarrow$ Der Fundamentalsatz der Algebra <u>muss</u> auf $\mathrm{Span}(1,\iota)$ anwendbar sein, d.h. jedes nicht-konstante Polynom aus $\mathbb{R}[X]$ muss in Linearfaktoren mit Koeffizienten aus $\mathrm{Span}(1,\iota)$ zerfallen!

In diesem Sinne können wir nun Antwort (1) auch abstrakt interpretieren: Wir haben obige Erkentnisse für zwei konkrete Modelle von $\mathbb{C}$ überprüft!

Weitere Informationen findet man z.B. in

Ebbinghaus, Zahlen, Springer-Verlag (2008).