Thomas Geiger
geigert@mathematik.uni-marburg.de SS 2010

Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie

Viele interessante holomorphe Funktionen lassen sich nur durch Grenzprozesse gewinnen und nicht unmittelbar angeben. Zunächst betrachten wir Folgen von Funktionen, später Reihen. Ausgangspunkt ist der Begriff der punktweisen Konvergenz für eine Folge von Funktionen:

Definition:
Sei X eine Menge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexwertiger Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$.

1. Die Folge heißt *konvergent* im Punkt $a \in X$, wenn die Folge $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen in $\mathbb{C}$ konvergiert.
2. Die Folge heißt *punktweise konvergent* in $A \subset X$, wenn sie in jedem $a \in A$ punktweise konvergiert.

Konvergiert eine solche Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A \subset X$ punktweise so definieren wir die *Grenzfunktion* der Folge als

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \end{array}$$

Beispiel:
Sei $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und $\overline{B_1(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Wir betrachten die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wobei

$$f_n : \overline{B_1(0)} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto z^n$$

Für $z \in B_1(0)$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0}$ (wegen $|z| < 1$) und speziell im Punkt $z = 1$ erhalten wir $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$.
Auf dem Intervall $A := [0,1] \subset \overline{B_1(0)}$ ergibt sich also insbesondere die Grenzfunktion

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z \in [0,1) \\ 1 & \text{für } z = 1 \end{cases}$$

Obwohl alle Folgenglieder stetige Funktionen auf $[0,1]$ sind erhalten wir eine unstetige Grenzfunktion. Da wir Grenzprozesse nutzen wollen, um holomorphe Funktionen zu finden wollen wir Begriffe zur Verfügung haben, die es uns erlauben von Eigenschaften der Folgenglieder auf Eigenschaften der Grenzfunktion zu schließen, beispielsweise wäre eine Aussage "f_n holomorph $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f$ holomorph" wünschenswert. Damit ist die punktweise Konvergenz offenbar nicht der geeignete Grenzwertbegriff, da wir gesehen haben, dass dieser nicht einmal die Stetigkeit der Grenzfunktion garantiert.
Eine Idee für einen stärkeren Begriff wäre es, zu fordern, dass die Folge nicht nur punktweise konvergiert, sondern in jedem Punkt die "Geschwindigkeit" der Konvergenz gleich ist. Dies führt zum Begriff der gleichmäßigen Konvergenz:

Definition:
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder eine Folge komplexwertiger Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$. Die Folge heißt in $A \subset X$ *gleichmäßig konvergent* gegen $f : A \to \mathbb{C}$, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n(\varepsilon), \forall x \in A$$

Wir haben also die gewöhnliche Definition für punktweise Konvergenz gewählt, mit dem Unterschied dass für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Zahl $n(\varepsilon)$ in jedem Punkt aus A gleich ist. Man beachte, dass offenbar jede in $A \subset X$ gleichmäßig konvergente Folge dort auch punktweise gegen die selbe Grenzfunktion konvergiert.

Beispiele:
Wir betrachten wieder die Folge aus dem ersten Beispiel:

$$f_n : \overline{B_1(0)} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto z^n$$

1. Auf dem Intervall $[0,1]$ konvergieren die f_n punktweise gegen die oben angegebene Grenzfunktion f, jedoch nicht gleichmäßig: Angenommen (f_n) konvergiert gleichmäßig, dann folgt insbesondere für $\varepsilon = \frac{1}{4}$:

$$\exists N \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{4} \;\; \forall n \geq N, \forall x \in [0,1]$$

Wir betrachten die Zahl $\sqrt[N]{\frac{1}{2}} \in [0,1)$ und erhalten aus obiger Ungleichung für $n = N$:

$$\frac{1}{4} > \left| f_N\left(\sqrt[N]{\frac{1}{2}}\right) - f\left(\sqrt[N]{\frac{1}{2}}\right) \right| = \left| \left(\sqrt[N]{\frac{1}{2}}\right)^N - 0 \right| = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

also den gewünschten Widerspruch.
Aus punktweiser Konvergenz folgt also nicht die gleichmäßige Konvergenz!

2. Wir haben oben gesehen, dass die f_n auf $B_1(0)$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergieren. Aber auch in diesem Fall liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor:
   Angenommen die f_n konvergieren auf $B_1(0)$ gleichmäßig (und damit gleichmäßig gegen die Nullfunktion). Wir wählen ein $0 < \varepsilon < 1$ und erhalten also:
   $$\exists N \in \mathbb{N} : \ |f_n(z)| < \varepsilon \ \ \forall n \geq N, \forall z \in B_1(0)$$
   Nun betrachten wir den Punkt $\sqrt[N]{\varepsilon} \in [0,1) \subset B_1(0)$ und erhalten aus dieser Ungleichung für $n = N$:
   $$\varepsilon > \left| f_N\left(\sqrt[N]{\varepsilon}\right) \right| = \left| \left(\sqrt[N]{\varepsilon}\right)^N \right| = \varepsilon$$
   also erneut einen Widerspruch.

Die gleichmäßige Konvergenz einer Folge lässt sich sehr bequem auf eine andere Art ausdrücken. Dazu benötigen wir vorbereitend:

Definition:
Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Seminorm*, falls $\forall v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\|v\| \geq 0$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Einer Seminorm fehlt also im Vergleich zu einer Norm auf dem Vektorraum nur die Eigenschaft $\|v\| = 0 \Longrightarrow v = 0$. Wir definieren nun die sogenannte Supremums-Seminorm für Unterräume des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\{f : X \longrightarrow \mathbb{C}\}$

Definition:
Sei $A \subset X$. Für ein $f : X \to \mathbb{C}$ definieren wir die *Supremums-Seminorm*

$$|f|_A := \sup_{x \in A} |f(x)| \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$$

Man kann nachrechnen, dass die Menge $V_A := \{f : X \to \mathbb{C} \mid |f|_A < \infty\}$ ein Untervektorraum von $\{f : X \longrightarrow \mathbb{C}\}$ ist und $| \ |_A$ eine Seminorm auf diesem Unterraum definiert, wodurch der Name Supremums-Seminorm gerechtfertigt ist.

Die gleichmäßige Konvergenz lässt sich damit nun folgendermaßen formulieren:

Lemma:
Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexwertiger Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$ und $A \subset X$. Genau dann konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A gleichmäßig gegen f, wenn gilt

$$\lim_{n \to \infty} |f_n - f|_A = 0$$

(d.h. wenn die Folge bezüglich der Supremums-Seminorm $| \ |_A$ gegen f konvergiert).

Es liegt nahe den Begriff der Cauchy-Folge für die Supremums-Seminormen einzuführen und die Frage zu stellen, ob jede Cauchy-Folge auch konvergiert.

Definition:
Eine Funktionenfolge (f_n), $f_n : X \to \mathbb{C}$ heißt auf $A \subset X$ Cauchy-Folge (bez. der Supremums-Seminorm), wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ |f_m - f_n|_A < \varepsilon \ \forall m, n \geq N$$

Satz: (Cauchysches Konvergenzkriterium)
Sei (f_n), $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge und $A \subset X$. Dann gilt: (f_n) ist in A gleichmäßig konvergent genau dann wenn (f_n) eine Cauchyfolge auf A ist.

Als Anwendung der Supremums-Seminorm betrachten wir erneut unser Beispiel $f_n : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}, \quad z \longmapsto z^n$

Beispiel:
Sei $0 < r < 1$. Dann haben wir oben gesehen, dass die f_n auf $B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\} \subset B_1(0)$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergieren. Diese Konvergenz ist auch gleichmäßig, denn es ist

$$|f_n - 0|_{B_r(0)} = \sup_{z \in B_r(0)} |f_n(z)| = \sup_{z \in B_r(0)} |z^n| = \sup_{z \in B_r(0)} |z|^n = r^n$$

Wegen $r < 1$ konvergiert r^n in $\mathbb{R}$ gegen 0 und damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n - 0|_{B_r(0)} = \lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$. Also folgt die gleichmäßige Konvergenz der f_n gegen die Nullfunktion auf $B_r(0)$.
Für $r = 1$ liefert dieses Argument folgendes: $|f_n - 0|_{B_r(0)} = 1^n = 1$ Daher ist $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n - 0|_{B_1(0)} = 1 \neq 0$. Wir erhalten also erneut, dass die f_n auf $B_1(0)$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergieren.

Betrachten wir dieses Beispiel für den Moment etwas genauer: Wir interpretieren die f_n als Folge stetiger Funktionen auf $B_1(0)$. Sie konvergiert dort punktweise gegen die (stetige) Nullfunktion als Grenzwert. Für jedes $r < 1$ konvergieren die f_n sogar gleichmäßig auf $B_r(0)$, jedoch nicht auf $B_1(0)$. Ein analoges Verhalten weißen viele Funktionenfolgen auf und es legt die Vermutung nahe, dass es vielleicht nicht so sehr auf die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge im ganzen Definitionsbereich ankommt, sondern nur darauf, dass lokal um jeden Punkt gleichmäßige Konvergenz vorliegt. Wir schwächen daher unseren Konvergenzbegriff etwas ab und definieren:

Definition:
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge komplexwertiger Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$. Die Folge heißt *lokal gleichmäßig konvergent* in X, wenn gilt: Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung $U \subset X$ $(x \in U)$ so dass die f_n in U gleichmäßig konvergieren.

Eine in X gleichmäßig konvergente Funktionenfolge konvergiert dort natürlich auch lokal gleichmäßig, da für jeden Punkt $x \in X$ ganz X als Umgebung verwendet werden kann. Außerdem konvergiert jede lokal gleichmäßig konvergente Folge offenbar auch punktweise. Wir haben also einen Konvergenzbegriff, der etwas stärker ist als punktweise Konvergenz, aber etwas schwächer als gleichmäßige.

Beispiel:
Es sei wieder

$$f_n : B_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto z^n$$

Wir wissen bereits, dass (f_n) nicht auf ganz $B_1(0)$ gleichmäßig konvergiert. Allerdings konvergiert (f_n) lokal gleichmäßig auf $B_1(0)$:
Sei $z_0 \in B_1(0)$. Dann finden wir ein kleines $\varepsilon > 0$ so dass $B_{|z_0|+\varepsilon}(0) \subset B_1(0)$
(wähle z.B. $\varepsilon := \frac{1-|z_0|}{2} > 0$ wegen $|z_0| < 1$. Dann ist $|z_0| + \varepsilon = |z_0| + \frac{1-|z_0|}{2} = \frac{2|z_0|+1-|z_0|}{2} = \frac{|z_0|+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$)
Wegen $\varepsilon > 0$ gilt $|z_0| < |z_0| + \varepsilon$ und damit $z_0 \in B_{|z_0|+\varepsilon}(0)$. Wir wissen wegen $|z_0| + \varepsilon < 1$ jedoch bereits, dass die f_n auf $B_{|z_0|+\varepsilon}(0)$ gleichmäßig konvergieren. Also haben wir mit $B_{|z_0|+\varepsilon}(0)$ eine Umgebung von z_0 gefunden, auf der die f_n gleichmäßig konvergieren.
Da $z_0 \in B_1(0)$ beliebig war, finden wir um jeden solchen Punkt eine entsprechende Umgebung, was zeigt, dass (f_n) lokal gleichmäßig auf $B_1(0)$ konvergiert.
Aus lokal gleichmäßiger Konvergenz folgt also nicht die gleichmäßige Konvergenz!

Dass der etwas schwächere Konvergenzbegriff der lokal gleichmäßigen Konvergenz sinnvoll ist, zeigt folgender Satz:

Satz:
Konvergiert die Folge (f_n) stetiger komplexwertiger Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$ lokal gleichmäßig in X so ist auch die Grenzfunktion f stetig.

Dass der Begriff der lokal gleichmäßigen Konvergenz für Folgen in der Funktionentheorie genau der passende Konvergenzbegriff ist, kann man erst später einsehen, wenn folgender bemerkenswerter Satz zur Verfügung steht, der in der reellen Analysis kein Analogon hat:

Satz (Konvergenzsatz von Weierstraß):
(f_n) sei eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ die in D lokal gleichmäßig konvergiert. Dann ist auch die Grenzfunktion f holomorph und die Folge (f_n') der Ableitungen konvergiert lokal gleichmäßig gegen f'.

Der Beweis dieses Satzes ist an dieser Stelle noch nicht möglich - er erfordert, dass wir zunächst die allgemeine Theorie der holomorphen Funktionen ausbauen. Daher müssen wir vorerst auf diesen Satz verzichten.

Wir betrachten nun noch eine bemerkenswerte Folgerung, die sich ergibt, wenn wir die lokal gleichmäßige Konvergenz mit dem Kompaktheitsbegriff verbinden.

Definition:
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge komplexwertiger Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$. Die Folge heißt *kompakt konvergent* in X, wenn die f_n in jeder kompakten Teilmenge $K \subset X$ gleichmäßig konvergieren.

Lokal gleichmäßige Konvergenz garantiert uns die gleichmäßige Konvergenz auf eventuell sehr kleinen Umgebungen aller Punkte aus X. Da kompakte Mengen in X sehr groß sein können wirkt dieser Konvergenzbegriff zunächst stärker als lokal gleichmäßige Konvergenz. Die folgende Aussage demonstriert einmal mehr die Mächtigkeit des Kompaktheitsbegriffs, die es uns hier ermöglicht von einer gleichmäßigen Konvergenz "im Kleinen" zu einer gleichmäßigen Konvergenz "im Großen" überzugehen:

Lemma:
Konvergiert (f_n) lokal gleichmäßig in X, dann konvergiert die Folge auch kompakt in X.

Beweis:
Es bezeichne f die Grenzfunktion von (f_n). Zu jedem $x \in X$ sei $U_x \subset X$ eine offene Umgebung, auf der f_n gleichmäßig konvergiert. Damit gilt $\bigcup\limits_{x\in X} U_x = X$ denn da stets $U_x \subset X$ haben wir $\bigcup\limits_{x\in X} U_x \subset X$ und da $x \in U_x \,\forall x \in X$ folgt auch $\bigcup\limits_{x\in X} U_x \supset X$.
Ist nun $K \subset X$ kompakt so bilden die U_x insbesondere eine offene Überdeckung von K. Nach der Definition von Kompaktheit existiert daher eine endliche Teilüberdeckung, d.h. $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ so dass $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$.
Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Da die f_n auf den U_{x_i} gleichmäßig konvergieren finden wir zu jedem i ein $n_i(\varepsilon)$ so dass gilt

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_i(\varepsilon)\,,\, z \in U_{x_i}$$

Definieren wir $N(\varepsilon) := \max\{n_i(\varepsilon) \mid 1 \leq i \leq n\}$ so folgt

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)\,,\, z \in \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

d.h. insbesondere, dass wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ finden, so dass

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)\,,\, z \in K$$

Damit ist gezeigt, dass die f_n auf K gleichmäßig konvergieren. Also konvergiert (f_n) kompakt in X. $\square$

Da in $\mathbb{C}$ jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt folgt sofort, dass für Folgen (f_n), $f_n : X \to \mathbb{C}$ mit $X \subset \mathbb{C}$ aus kompakter Konvergenz auch lokal gleichmäßige Konvergenz folgt. Für unsere Belange sind also beide Begriffe äquivalent, was eine schöne Formulierung der bemerkenswerten Tatsache ist, dass aus der gleichmäßigen Konvergenz auf kleinen Mengen die gleichmäßige Konvergenz auf großen Mengen folgt.

Abschließend sei angemerkt, dass sämtliche Konvergenzbegriffe natürlich mit der Vektorraumstruktur von $\{f : X \to \mathbb{C}\}$ verträglich sind:

Lemma:
Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und (f_n), (g_n) komplexwertige Funktionenfolgen in X, die dort punktweise (bzw. auf $A \subset X$ gleichmäßig bzw. lokal gleichmäßig) konvergieren, dann konvergiert auch die Folge

$$(af_n + bg_n)$$

in X punktweise (bzw. auf $A \subset X$ gleichmäßig bzw. lokal gleichmäßig) und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(af_n + bg_n) = a\lim_{n\to\infty} f_n + b\lim_{n\to\infty} g_n$$

Funktionenreihen

Neben Folgen von Funktionen müssen auch Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ (Kurznotation: $\sum f_k$) betrachtet werden, die wir wie gewohnt als Folge ihrer Partialsummen auffassen, also $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Damit stehen sämtliche Konvergenzbegriffe für Folgen auch für Reihen zur Verfügung und es liegt nahe, zunächst den Begriff der lokal gleichmäßigen Konvergenz als natürlich zu betrachten. Man kann direkt das Cauchy-Konvergenzkriterium für die gleichmäßige Konvergenz übertragen:

Lemma: (Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen)
Es sei $\sum f_k$ eine Reihe von Funktionen $f_k : X \to \mathbb{C}$ und $A \subset X$. Dann konvergiert die Reihe in A gleichmäßig genau dann, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon\ \forall n \geq m > n(\varepsilon),\ x \in A$$

Dieses Kriterium ist jedoch für konkret vorgelegte Reihen recht unhandlich. Besonders einfach zugänglich ist das Majorantenkriterium von Weierstraß:

Satz: (Majorantenkriterium von Weierstraß)
Sei $\sum f_k$ eine Reihe von Funktionen $f_k : X \to \mathbb{C}$ und $A \subset X$. Es gebe eine Folge reeller Zahlen $M_k \geq 0$ so dass

$$|f_k|_A \leq M_k\ \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \sum M_k < \infty\ \text{(d.h. die Reihe konvergiert)}$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum f_k$ gleichmäßig in A.

Um mit einer Reihe von Funktionen bequem arbeiten zu können benötigt man den Umordnungssatz, d.h. eine beliebige Umordnung der Reihenglieder soll das Konvergenzverhalten nicht beeinflussen (eine Art Kommutativgesetz für unendliche Summen). Es gibt jedoch sogar gleichmäßig konvergente Reihen, die durch geeignete Umordnung divergent werden.
Die lokal gleichmäßige Konvergenz ist also im Gegensatz zu Funktionenfolgen für Funktionenreihen nicht der geeignete Konvergenzbegriff. Betrachten wir nun das Majorantenkriterium von Weierstraß etwas genauer.

Beispiel:
Sei $\sum f_k$ eine Reihe von Funktionen $f_k : X \to \mathbb{C}$ für die in $A \subset X$ das Weierstraßsche Majorantenkriterium erfüllt ist, d.h. $\exists\, M_k \geq 0$ mit $\sum M_k < \infty$ und $|f_k|_A \leq M_k\ \forall k \in \mathbb{N}$. Wir wissen bereits dass damit die Reihe $\sum f_k$ gleichmäßig in A konvergiert. Sei nun $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Wir betrachten die umgeordnete Reihe $\sum f_{\tau(k)}$. Da $M_k \geq 0$ gilt, konvergiert die Reihe $\sum M_k$ absolut und kann daher umgeordnet werden. Also gilt auch $\sum M_{\tau(k)} < \infty$ und damit ist das Majorantenkriterium auch für die umgeordnete Reihe $\sum f_{\tau(k)}$ erfüllt.
Da außerdem $\sum |f_k(x)| \leq \sum |f_k|_A < \infty\ \forall x \in A$ konvergiert die Reihe $\sum f_k(x)$ absolut $\forall x \in A$ und damit beide Reihen gegen dieselbe Grenzfunktion.
Wir sehen also, dass uns die Gültigkeit des Weierstraßschen Majorantenkriteriums nicht nur gleichmäßige Konvergenz liefert, sondern auch den Umordnungssatz. Wir erklären daher speziell für Funktionenreihen einen neuen Konvergenzbegriff indem wir lokal die Gültigkeit des Weierstraßschen Majorantenkriteriums fordern:

Definition:
Die Reihe $\sum f_k$ von Funktionen $f_k : X \to \mathbb{C}$ heißt in X *normal konvergent*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ besitzt, so dass $\sum |f_k|_U < \infty$ gilt.

Mit dem Weißerstraßschen Majorantenkriterium erhalten wir sofort, dass eine normal konvergente Reihe auch lokal gleichmäßig konvergiert. Weiter gilt wie wir uns bereits überlegt haben der Umordnungssatz:

Satz: (Umordnungssatz)
$\sum f_k$ konvergiere in X normal gegen eine Funktion f. Ist $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, so konvergiert auch die umgeordnete Reihe $\sum f_{\tau(k)}$ in X normal gegen f.