

Funktionentheorie I, SoSe 2013 - Lösung Blatt 1

$$1.1. (i) \frac{5+i}{7+i} = \frac{(5+i)(7-i)}{(7+i)(7-i)} = \frac{35 - 5i + 7i - i^2}{49 - i^2}$$

$$= \frac{36 + 2i}{50} = \frac{18}{25} + i \frac{1}{25} \quad \text{ok.}$$

$$\bullet 1 + i + \dots + i^{2013} = \sum_{k=0}^{2013} i^k = \frac{1 - i^{2014}}{1 - i}$$

↑
geom. Summe

Es ist

$$i^{2014} = (i^2)^{1007} = (-1)^{1007} = -1$$

und damit:

$$1 + i + \dots + i^{2013} = \frac{1 - i^{2014}}{1 - i} = \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1+i)}{1 - i^2} = 1 + i \quad \text{ok.}$$

(ii) Wir berechnen für $z \neq -1$:

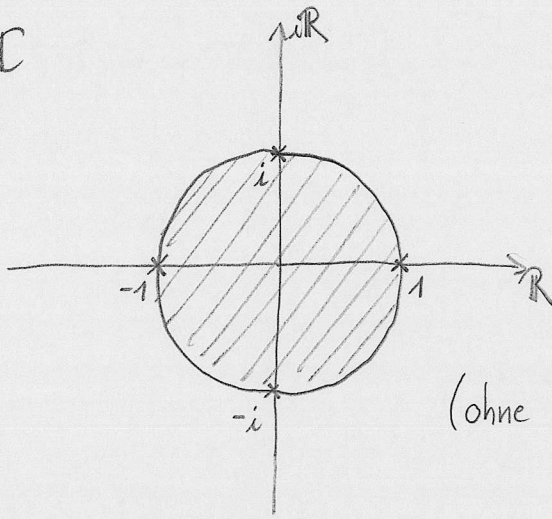
$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z+1} &= \frac{(z-1)\overline{(z+1)}}{(z+1)\overline{(z+1)}} = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2} = \frac{z\bar{z} + z - \bar{z} - 1}{|z+1|^2} \\ &= \frac{|z|^2 + 2i\operatorname{Im}(z) - 1}{|z+1|^2} = \frac{|z|^2 - 1}{|z+1|^2} + i \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z+1|^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{|z|^2 - 1}{|z+1|^2} \quad \text{Also: } \operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) < 0 \Leftrightarrow |z|^2 - 1 < 0 \\ \Leftrightarrow |z| < 1.$$

$$\Rightarrow \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \mid \operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) < 0 \right\} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$$

Skizze:

$\mathbb{C}$



(ohne Rand der Kreisscheibe).

1.2. Wir schreiben stets $z = x + iy$ für $z \in \mathbb{C}$.

$$(i) \quad f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2 y^2 \\ = x^2 - y^2 + i(2xy).$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(f(x+iy)) = x^2 - y^2, \quad \operatorname{Im}(f(x+iy)) = 2xy. \quad \text{ok.}$$

(ii) Wir berechnen:

$$15 + 8i = f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 + i(2xy)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ 2xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 + 15 & \text{(I)} \\ xy = 4 & \text{(II)} \end{cases}$$

Damit:

$$(II) \Rightarrow x^2 y^2 = 16 \xrightarrow{\text{mit (I)}} (y^2 + 15) y^2 = 16$$

$$\Rightarrow y^4 + 15y^2 - 16 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{Lsgformel}} y^2 = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 + 4 \cdot 16}}{2} = \frac{-15}{2} \pm \frac{17}{2} \in \{-16, 1\}.$$

Wegen $y \in \mathbb{R}$ ist $y^2 \geq 0$, also folgt notwendig: $y^2 = 1$.

$$\Rightarrow y = \pm 1 \text{ und damit ergibt (II): } x = \frac{4}{y}.$$

Es gilt also notwendig:

$$x+iy \in \{4+i, -4-i\}, \text{ d.h. } z = \pm(4+i).$$

Wegen

$$(\pm(4+i))^2 = 16 + 8i + i^2 = 15 + 8i$$

sind dies tatsächlich die Lösungen.

ok.

(iii) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ fest.

Behauptung:

$$f(\{x_0 + iy \mid y \in \mathbb{R}\}) = \{u + iv \in \mathbb{C} \mid u \leq x_0^2, v = \pm 2x_0 \sqrt{x_0^2 - u}\}$$

Beweis:

" $\subset$ ": Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\Rightarrow f(x_0 + iy) = \underbrace{x_0^2 - y^2}_{=: u} + i \underbrace{2x_0 y}_{=: v}$$

Dann folgt:

$$\cdot u = x_0^2 - y^2 \leq x_0^2$$

$$\cdot v = 2x_0 y \text{ und } u = x_0^2 - y^2, \text{ d.h. } y = \pm \sqrt{x_0^2 - u}$$

$$\text{also } v = \pm 2x_0 \sqrt{x_0^2 - u}$$

ok.

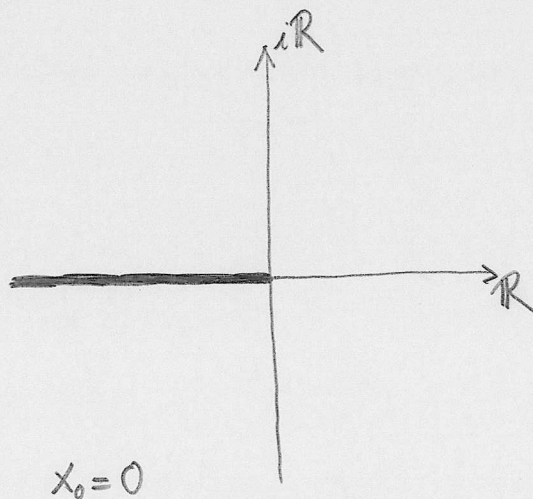
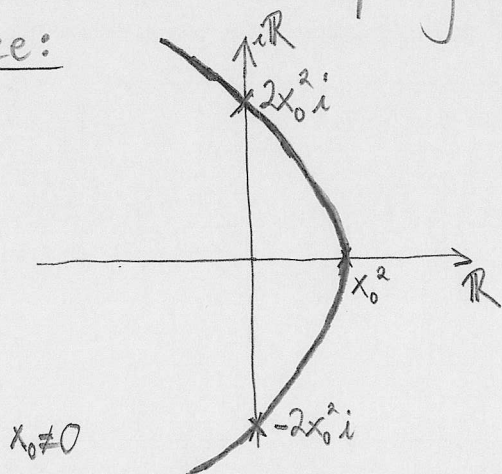
" $\supset$ ": Sind $u, v \in \mathbb{R}$ gegeben mit $u \leq x_0^2$ und $v = \pm 2x_0 \sqrt{x_0^2 - u}$,
dann setze $y := \pm \sqrt{x_0^2 - u} \in \mathbb{R}$ mit Vorzeichen wie bei v .

$$\Rightarrow f(x_0 + iy) = x_0^2 - y^2 + i 2x_0 y = x_0^2 - (x_0^2 - u) + i (\pm 2x_0 \sqrt{x_0^2 - u})$$
$$= u + iv$$

ok.

Also ist die Behauptung gezeigt.

Skizze:



Behauptung:

$$f^{-1}(\{x_0 + iy \mid y \in \mathbb{R}\}) = \{u + iv \in \mathbb{C} \mid u^2 \geq x_0, v = \pm \sqrt{u^2 - x_0}\}$$

Beweis:

" $\subset$ ": Seien $u, v \in \mathbb{R}$ gegeben mit $x_0 + iy = f(u + iv) = u^2 - v^2 + 2iuv$

Damit folgt:

- $x_0 = u^2 - v^2 \leq u^2$

- $v = \pm \sqrt{u^2 - x_0}$

ok.

" $\supset$ ": Seien $u, v \in \mathbb{R}$ gegeben mit $u^2 \geq x_0, v = \pm \sqrt{u^2 - x_0}$.

Dann ist

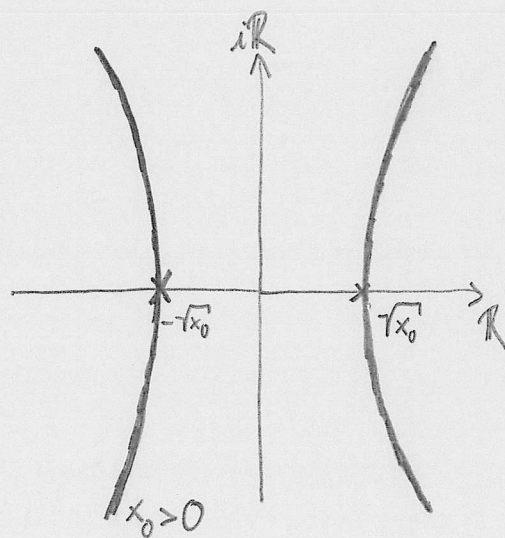
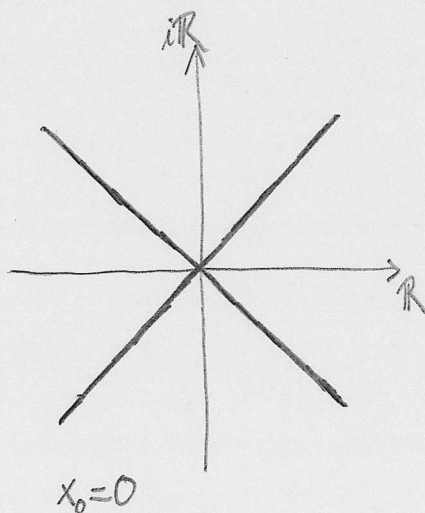
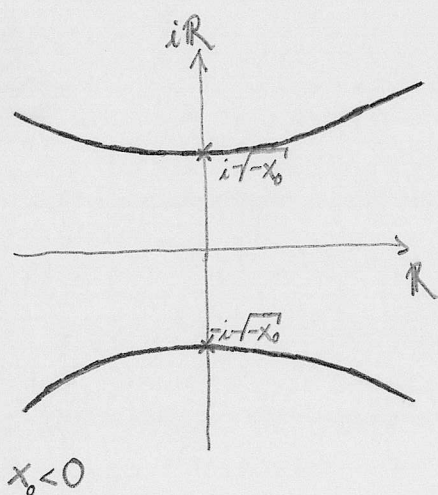
$$f(u + iv) = u^2 - v^2 + i2uv = (u^2 - (u^2 - x_0)) + i2u(\pm \sqrt{u^2 - x_0})$$

$$= x_0 + iy \quad \text{für ein } y \in \mathbb{R}.$$

ok.

Also ist die Behauptung gezeigt.

Skizze:



Sei nun $y_0 \in \mathbb{R}$ fest.

Behauptung:

$$f(\{x+iy_0 \mid x \in \mathbb{R}\}) = \{u+iv \mid u \geq -y_0^2, v = \pm 2y_0 \sqrt{u+y_0^2}\}$$

Beweis:

"C": Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\Rightarrow f(x+iy_0) = \underbrace{x^2 - y_0^2}_{=: u} + i \underbrace{2xy_0}_{=: v}$$

Dann folgt:

$$\bullet u = x^2 - y_0^2 \geq -y_0^2$$

$$\bullet v = 2xy_0 \text{ und } u = x^2 - y_0^2, \text{ d.h. } x = \pm \sqrt{u+y_0^2}$$

$$\text{also } v = \pm 2y_0 \sqrt{u+y_0^2}$$

OK.

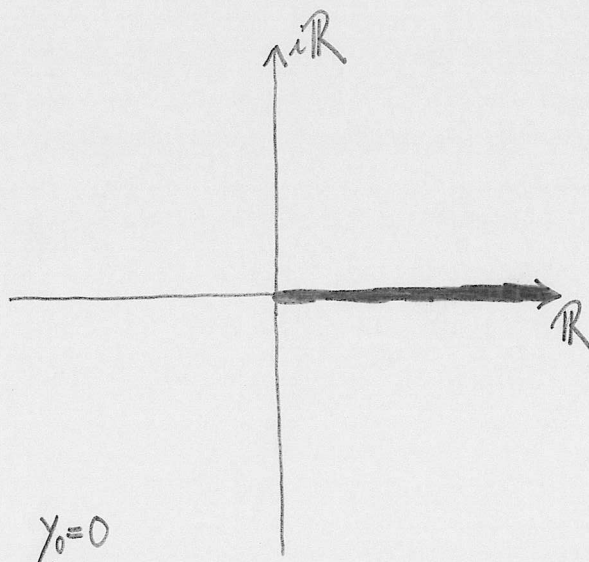
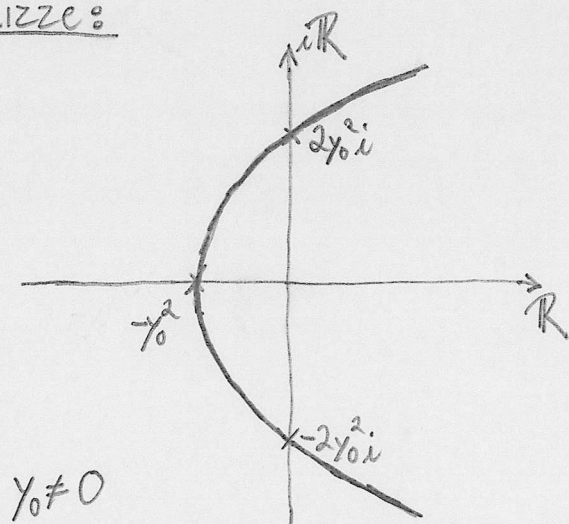
"D": Sind $u, v \in \mathbb{R}$ gegeben mit $u \geq -y_0^2$ und $v = \pm 2y_0 \sqrt{u+y_0^2}$,

dann setze $x := \pm \sqrt{u+y_0^2} \in \mathbb{R}$ mit Vorzeichen wie bei v .

$$\Rightarrow f(x+iy_0) = x^2 - y_0^2 + i2xy_0 = (u+y_0^2 - y_0^2) + i(\pm 2y_0 \sqrt{u+y_0^2}) = u+iv \quad \text{OK.}$$

Also ist die Behauptung gezeigt.

Skizze:



Behauptung:

$$f^{-1}(\{x+iy_0 \mid x \in \mathbb{R}\}) = \{u+iv \in \mathbb{C} \mid uv = \frac{y_0}{2}\}$$

Beweis:

„ $\Leftarrow$ “: Seien $u, v \in \mathbb{R}$ gegeben, mit $x+iy_0 = f(u+iv) = u^2 - v^2 + i2uv$.

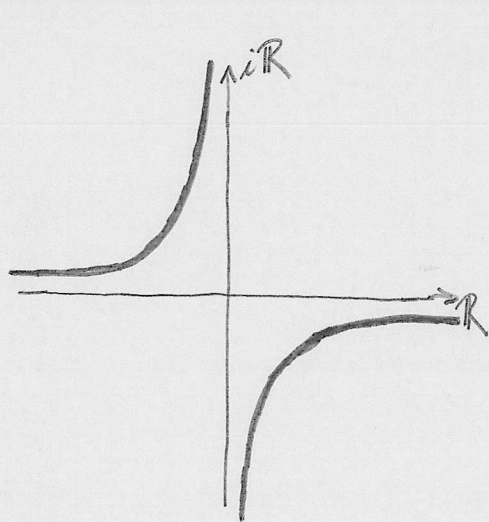
$$\Rightarrow 2uv = y_0, \text{ d.h. } uv = \frac{y_0}{2} \quad \text{ok.}$$

„ $\Rightarrow$ “: Sind $u, v \in \mathbb{R}$ gegeben mit $uv = \frac{y_0}{2}$, dann ist

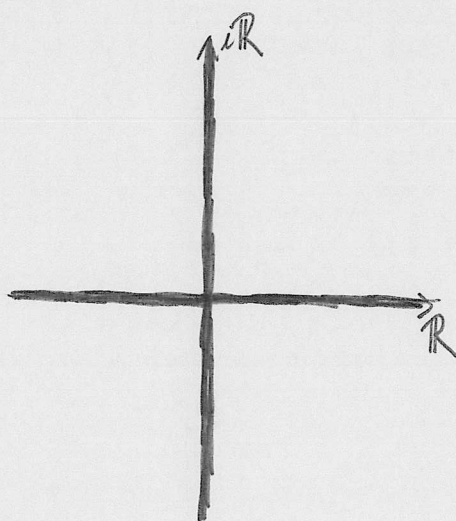
$$f(u+iv) = u^2 - v^2 + i2uv = \underbrace{u^2 - v^2}_{\in \mathbb{R}} + iy_0 \quad \text{ok.}$$

Also ist die Behauptung gezeigt.

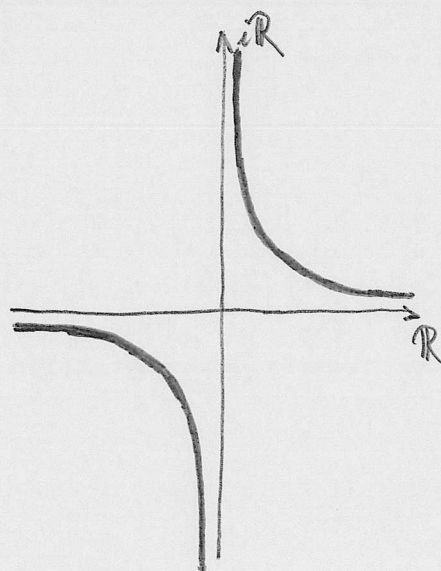
Skizze:



$y_0 < 0$



$y_0 = 0$



$y_0 > 0$



1.3. (i) • Sind Konstanten $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$ gegeben, dann ist

$$A: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \alpha z + \mu \bar{z}$$

$\mathbb{R}$ -linear, denn für $z, w \in \mathbb{C}$ und $s \in \mathbb{R}$ berechnen wir:

$$\begin{aligned} A(z+w) &= \alpha(z+w) + \mu \overline{(z+w)} = \alpha z + \alpha w + \mu \bar{z} + \mu \bar{w} \\ &= A(z) + A(w). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(s \cdot z) &= \alpha(s z) + \mu \overline{(s z)} = s \alpha z + \bar{s} \mu \bar{z} \\ &= s(\alpha z + \mu \bar{z}) = s A(z). \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ = s \text{ da } s \in \mathbb{R} \end{array}$$

• Sei umgekehrt $A: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ -linear. Dann berechnen wir:

$$\begin{aligned} A(z) &= A(\operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)) = A(1) \operatorname{Re}(z) + A(i) \operatorname{Im}(z) \\ &= A(1) \frac{z + \bar{z}}{2} + A(i) \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{1}{2} (A(1) - i A(i)) z + \frac{1}{2} (A(1) + i A(i)) \bar{z} \\ &= \alpha z + \mu \bar{z} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \alpha := \frac{1}{2} (A(1) - i A(i)) \text{ und } \mu := \frac{1}{2} (A(1) + i A(i)).$$

Die Konstanten α und μ sind insbesondere eindeutig durch A festgelegt!

(ii) Als $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung ist $A: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ offenbar genau dann $\mathbb{C}$ -linear, wenn $A(i) = i A(1)$ gilt, d.h. wenn

$$i A(1) - A(i) = 0$$

gilt. Nach Teil (i) gilt für die zu A gehörende Konstante μ :

$$2\mu = A(1) + iA(i) \Leftrightarrow 2i\mu = iA(1) - A(i).$$

Also erhalten wir:

$$iA(1) - A(i) = 0 \Leftrightarrow 2i\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 0. \quad \text{ok.}$$

(iii). Gemäß (i) schreiben wir A in der Form

$$A(z) = \alpha z + \mu \bar{z} \quad \text{für gewisse } \alpha, \mu \in \mathbb{C}.$$

Nun ist:

$$A(1) = \alpha + \mu = a = \frac{a + \bar{a}}{2} + i \frac{a - \bar{a}}{2i}$$

$$A(i) = \alpha i - \mu i = ib = \frac{\bar{b} - b}{2i} + i \frac{b + \bar{b}}{2}$$

wobei wir $a = \alpha + \mu$ und $b = \alpha - \mu$ gesetzt haben.

Bezüglich der $\mathbb{R}$ -Basis $\{1, i\}$ von $\mathbb{C}$ besitzt daher A die Matrixdarstellung

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + \bar{a} & \frac{\bar{b} - b}{i} \\ \frac{a - \bar{a}}{i} & b + \bar{b} \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \det A = \det M = \frac{1}{4} \left(ab + a\bar{b} + \bar{a}b + \bar{a}\bar{b} - \frac{1}{i^2} (a\bar{b} - ab - \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b) \right)$$

$$= \frac{1}{4} (ab + a\bar{b} + \bar{a}b + \bar{a}\bar{b} + a\bar{b} - ab - \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b)$$

$$= \frac{1}{2} (a\bar{b} + \bar{a}b) = \frac{1}{2} (a\bar{b} + \overline{a\bar{b}}) = \operatorname{Re}(a\bar{b}) = \operatorname{Re}(\alpha\bar{b} - \alpha\bar{\mu} + \mu\bar{a} - \mu\bar{\mu})$$

$$= \operatorname{Re}(\underbrace{\lambda\bar{\lambda} - \mu\bar{\mu}}_{=|\lambda|^2 - |\mu|^2 \in \mathbb{R}}) + \operatorname{Re}(\mu\bar{\lambda} - \lambda\bar{\mu})$$

$$= \lambda\bar{\lambda} - \mu\bar{\mu} + \frac{\mu\bar{\lambda} - \lambda\bar{\mu} + \bar{\mu}\lambda - \bar{\lambda}\mu}{2} = \lambda\bar{\lambda} - \mu\bar{\mu}.$$

Damit argumentieren wir wie folgt:

A ist bijektiv $\xLeftrightarrow{\text{Lin. Alg.}}$ A ist $\mathbb{R}$ -Vektorraumisomorphismus

$$\xLeftrightarrow{\text{Lin. Alg.}} \det A \neq 0$$

$$\xLeftrightarrow{\text{s.o.}} \lambda\bar{\lambda} - \mu\bar{\mu} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda\bar{\lambda} \neq \mu\bar{\mu}.$$

OK.

• Sei nun A als $\mathbb{C}$ -linear vorausgesetzt.

$$\stackrel{(\text{ii})}{\Rightarrow} \mu = 0.$$

Falls auch $\lambda = 0$ gilt, ist $A(z) = \lambda z + \mu\bar{z} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$,
d.h. A ist die Nullabbildung.

Sei also $\lambda \neq 0$. $\Rightarrow \lambda\bar{\lambda} = |\lambda|^2 \neq 0 = \mu\bar{\mu}$.

$\stackrel{\text{s.o.}}{\Rightarrow} A$ ist bijektiv also nach Linearer Algebra ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum Isomorphismus.

Insgesamt: In dieser Situation ist A entweder die Nullabbildung oder ein Isomorphismus.



1.4. • Im Fall $n=1$ ist der vorgelegte Körper nach Voraussetzung der Körper der reellen Zahlen. Sei also $n > 1$.

• Ist $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gegeben, dann betrachten wir die Potenzen $1=p^0, p=p^1, p^2, p^3, \dots$ als Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

Wegen $\dim \mathbb{R}^n = n$ gibt es also ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$1, p, p^2, \dots, p^m$$

linear abhängig in $\mathbb{R}^n$ sind.

$\Rightarrow \exists a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ so dass nicht alle a_k Null sind, mit

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m p^m = 0$$

d.h. $\sum_{k=0}^m a_k p^k = 0$ und ohne Einschränkung sei $a_m = 1$.

Mit $P := \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ haben wir also ein

vom Nullpolynom verschiedenes Polynom aus $\mathbb{R}[X]$ gefunden, mit $P(p) = 0$. (*)

• Wegen $n > 1$ können wir ein $v \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}$ wählen. Nach (*) existiert ein $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ mit $P(v) = 0$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt P über $\mathbb{C}[X]$ in Linearfaktoren. Da P reelle Koeffizienten besitzt, zerfällt

P also über $\mathbb{R}[X]$ in ein Produkt von Polynomen vom Grad 1 oder 2.

$\Rightarrow v$ ist Nullstelle eines Polynoms $Q \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad 1 oder 2.

$\nearrow \deg Q = 1 \Rightarrow Q = X + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Wegen $Q(v) = 0$ ist also $v = -c \in \mathbb{R}$ $\downarrow$.

$\Rightarrow \deg Q = 2$, d.h. $Q = X^2 + aX + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

Wegen $Q(v) = 0$ ist $v^2 + av + b = 0$.

Insgesamt haben wir gezeigt:

$\exists c, d \in \mathbb{R}$ mit $v^2 = c + dv$. (**)

• Wir definieren nun $w := v - \frac{1}{2}d \notin \mathbb{R}$ (da sonst $v \in \mathbb{R}$ wäre).

und berechnen:

$$\begin{aligned} w^2 &= \left(v - \frac{1}{2}d\right)^2 = v^2 - vd + \frac{1}{4}d^2 \stackrel{(**)}{=} c + dv - vd + \frac{1}{4}d^2 \\ &= \underbrace{c + \left(\frac{1}{2}d\right)^2}_{=: r} \in \mathbb{R} \quad (\text{da } c, d \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

$\nearrow r \geq 0 \Rightarrow \exists \sqrt{r} \in \mathbb{R} \stackrel{X^2=r \text{ hat höchst. 2 Lsgen}}{\Rightarrow} w = \pm \sqrt{r} \in \mathbb{R} \downarrow$

$\Rightarrow r < 0$ also gibt es ein $s \in \mathbb{R}$ mit $s^2 = \frac{1}{-r}$.

Wir definieren schließlich $v := sw \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}$ und erhalten

$$v^2 = s^2 w^2 = \frac{-1}{r} \cdot r = -1.$$

Also haben wir gezeigt: $\exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}$ mit $v^2 = -1$.

$\Rightarrow$ Mit $\text{Span}(1, v) \subset \mathbb{R}^n$ haben wir ein Modell für $\mathbb{C}$ in dem vorgelegten Körper gefunden, genauer ist

$$\mathbb{C} \rightarrow \text{Span}(1, v), \quad x+iy \mapsto x+vy$$

ein Isomorphismus von Körpern, so dass wir $\mathbb{C}$ mit $\text{Span}(1, v)$ identifizieren können.

• Es genügt nun zu zeigen, dass $\mathbb{R}^n = \text{Span}(1, v)$ gilt.

Sei dazu $p \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}$ beliebig. (dies genügt wegen $\mathbb{R} \subset \text{Span}(1, v)$)

Nach (*) existiert $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ mit $P(p) = 0$.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist

$$P(X) = (X - a_1) \cdot \dots \cdot (X - a_m) \quad \text{für gewisse } a_k \in \mathbb{C} = \text{Span}(1, v).$$

Wegen $P(p) = 0$ gilt also für ein k mit $1 \leq k \leq m$:

$$p = a_k \in \text{Span}(1, v).$$

$\xRightarrow{p \text{ beliebig}} \mathbb{R}^n \subset \text{Span}(1, v) \subset \mathbb{R}^n$, d.h. $\mathbb{R}^n = \text{Span}(1, v) (= \mathbb{C})$.

