# Funktionentheorie I, SoSe 2013 – Lösung Blatt 10

**10.1.** (i) • Behauptung: In $\mathcal{O}(B_2(0))$ gibt es keine nichtkonstante Funktion, welche $N$ als Nullstellenmenge besitzt.

Denn: Sei $f: B_2(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit:

$$f(z) = 0 \iff z \in N$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ist $0 \in B_2(0)$ ein Häufungspunkt der Menge $N$, welcher in $B_2(0)$ liegt.

$\overset{\text{Identitäts-}}{\underset{\text{satz}}{\Longrightarrow}}$ $f \equiv 0$ und damit konstant. ok.

• Behauptung: In $\mathcal{O}(B_1(1))$ gibt es eine nichtkonstante Funktion, welche $N$ als Nullstellenmenge besitzt.

Denn: Für die holomorphe Funktion

$$\sin: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\sin(z) = 0 &\iff \frac{1}{2i}\big(\exp(iz) - \exp(-iz)\big) = 0 \\
&\iff \exp(iz) = \exp(-iz) \\
&\iff \exp(iz)\exp(-iz)^{-1} = 1 \\
&\iff \exp(2iz) = 1
\end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{Kern}(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$ gilt also:

$$\sin(z) = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}.$$

Nun ist die Funktion

$$f: B_1(1) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$$

offenbar wohldefiniert, holomorph und nicht konstant.
Für die Nullstellen von $f$ folgt mit $z \in B_1(1)$:

$$f(z) = 0 \iff \frac{\pi}{z} \in \pi\mathbb{Z}$$

$$\iff z = \frac{1}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

(Zahlen $\leq 0$ aus $\mathbb{Z}$ fallen wegen der Bedingung $z \in B_1(1)$ fort.).

Also: $f(z) = 0 \iff z \in N$. ok.

(Diese Aussage ist <u>kein</u> Widerspruch gegen den Identitätssatz, denn der einzige Häufungspunkt der Menge $N$ ist $0 \in \mathbb{C}$. Da aber $0 \notin B_1(1)$ ist, kann der Identitätssatz hier nicht angewandt werden.
Fazit: Die Voraussetzung, dass ein Häufungspunkt der „Identitätsmenge" zum Gebiet gehört, ist für den Identitätssatz <u>wesentlich</u>!)

(ii) • Da $G \subset \mathbb{C}$ symmetrisch bezüglich der reellen Achse ist, ist die Funktion

$$g: G \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \overline{f(\overline{z})}$$

wohldefiniert. Wir schreiben

$$f(x+iy) = u(x+iy) + i\,v(x+iy).$$

Da $f$ holomorph ist, gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x+iy) = \frac{\partial v}{\partial y}(x+iy), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x+iy) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x+iy) \quad \forall\ (x+iy) \in G.$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} g(x+iy) &= \tilde{u}(x+iy) + i\,\tilde{v}(x+iy) \\ &= u(x-iy) - i\,v(x-iy). \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{u}(x+iy) &= u(x-iy) \\ \tilde{v}(x+iy) &= -v(x-iy) \end{aligned} \qquad \forall\ (x+iy) \in G.$$

Damit folgt auf $G$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x+iy) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x-iy) = \frac{\partial v}{\partial y}(x-iy) = (-1)^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}(x+iy) \\ &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}(x+iy) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x+iy) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x-iy) = \frac{\partial v}{\partial x}(x-iy) = -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}(x+iy)$$

Also folgt: $g$ ist holomorph auf ganz $G$.

- Sei nun

$$M := \{ z \in G_{\mathbb{R}} \mid f(z) \in \mathbb{R} \} \subset G_{\mathbb{R}}.$$

Wir müssen $M = G_{\mathbb{R}}$ zeigen. Dazu berechnen wir für $z \in M$:

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})} \overset{z \in \mathbb{R}}{=} \overline{f(z)} \overset{f(z) \in \mathbb{R}}{=} f(z).$$

Da $M$ nach Voraussetzung einen Häufungspunkt in $G$ besitzt, folgt aus dem Identitätssatz:

$$f \equiv g \qquad \text{(auf ganz } G\text{)}$$

Damit berechnen wir aber für $z \in G_{\mathbb{R}}$:

$$f(z) = g(z) = \overline{f(\bar{z})} \overset{z \in \mathbb{R}}{=} \overline{f(z)}$$

$$\Rightarrow f(z) \in \mathbb{R}.$$

Insgesamt haben wir also bewiesen:

$$G_{\mathbb{R}} = M.$$

$\blacksquare$

10.2. • Nach dem Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor Können wir $f$ um $0 \in \mathbb{D}$ in eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

entwickeln, welche auf ganz $\mathbb{D} = B_1(0)$ gegen $f$ Konvergiert. Da $f$ nach Voraussetzung in $0 \in \mathbb{D}$ eine Nullstelle der Ordnung $n \geq 1$ besitzt, folgt:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Also erhalten wir:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} z^{k+n} = z^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} z^{k+1}$$

$$= z^{n-1} \underbrace{\left( 0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n-1} z^k \right)}_{=: g(z)}$$

Wir haben also gezeigt: Es gibt eine holomorphe Funktion $g: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = z^{n-1} \cdot g(z) \quad \forall z \in \mathbb{D} \quad \text{und} \quad g(0) = 0.$$

- Wir behaupten nun, dass $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ gilt.

$\lightning$ $\exists\, p \in \mathbb{D}$ mit $|g(p)| > 1$.

Wegen $|z|^{n-1} |g(z)| = |z^{n-1} g(z)| = |f(z)| < 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}$ folgt dann

$$|p|^{n-1} < \frac{1}{|g(p)|}, \text{ also } |p| < \sqrt[n-1]{\frac{1}{|g(p)|}}$$

Wir definieren $R := \sqrt[n-1]{\frac{1}{|g(p)|}} > 0$. Dann ist

$$R < \sqrt[n-1]{1} = 1 \quad \left(\text{wegen } \frac{1}{|g(p)|} < 1\right).$$

Also ist $\overline{B_R(0)} \subset \mathbb{D}$.

Da $g$ auf $B_R(0)$ holomorph und auf $\overline{B_R(0)}$ stetig ist, folgt wie in der Lösung von Aufgabe 9.3. (i):

$$\exists\, q \in \partial B_R(0) \text{ mit } |g(z)| \leq |g(q)| \quad \forall z \in \overline{B_R(0)}$$

Wegen $q \in \partial B_R(0)$ gilt $|q| = R$ und da $|p| < R$ ist, folgt $p \in B_R(0)$ und damit:

$$|g(p)| \leq |g(q)|$$

Wie zuvor gilt aber auch für $q$:

$$|q|^{n-1} |g(q)| < 1$$

und damit:

$$|q| < \sqrt[n-1]{\frac{1}{|g(q)|}} \leq \sqrt[n-1]{\frac{1}{|g(p)|}} = R.$$

Also gilt: $|q| < R$ $\quad ↯_{|q|=R}.$

Es muss also doch $|g(z)| < 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}$ gelten.
Wir haben zusammenfassend also eine holomorphe Funktion

$$g: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

Konstruiert, mit $g(0) = 0$ und

$$f(z) = z^{n-1} g(z) \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

- Indem wir das Lemma von Schwarz auf $g$ anwenden, folgt:

$$|g(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D} \quad \text{und} \quad |g'(0)| \leq 1.$$

Damit erhalten wir aber für beliebiges $z \in \mathbb{D}$:

$$|f(z)| = |z^{n-1} g(z)| = |z|^{n-1} |g(z)| \leq |z|^n.$$

Ferner gilt nach Konstruktion:

$$g'(0) = a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\Rightarrow \quad |f^{(n)}(0)| = n!\, |g'(0)| \leq n!$$

Also ist der erste Teil der Aufgabe bewiesen.

- Wir formen die Zusatzbedingungen um.

Gelte $|f(c)| = |c|^n$ für ein $c \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

$$\Rightarrow \quad |c|^{n-1} |g(c)| = |f(c)| = |c|^n$$

$$\overset{c \neq 0}{\Rightarrow} \quad |g(c)| = |c| .$$

Gilt stattdessen $|f^{(n)}(0)| = n!$, dann:

$$|g'(0)| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1 .$$

- Wir sehen also: Gilt $|f(c)| = |c|^n$ für ein $c \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ oder gilt $|f^{(n)}(0)| = n!$, dann ist

$$|g(c)| = |c| \text{ für ein } c \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \quad \text{oder} \quad |g'(0)| = 1 .$$

In diesem Fall folgt noch mehr aus dem Lemma von Schwarz:

$$\overset{\text{Schwarz}}{\Rightarrow} \exists \, \lambda \in S^1 \text{ mit } \quad g(z) = \lambda \cdot z \qquad \forall z \in \mathbb{D} .$$

Daraus erhalten wir aber für $z \in \mathbb{D}$ beliebig:

$$f(z) = z^{n-1} g(z) = \lambda z^n .$$

Damit ist alles gezeigt. $\blacksquare$

10.3. (i) Sei $G = \mathbb{D} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$.

- Sei $f : G \to G$ biholomorph.

Wegen $f(G) = G \subset \mathbb{D}$ ist dann $f$ beschränkt um die Punkte $0$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ herum.

$\xRightarrow[\text{Fortsetzungssatz}]{\text{Riemannscher}}$ $\exists\ F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $F|_G = f$.

Wie in der Lösung von Aufgabe 9.2. folgt wegen der Stetigkeit von $F$:

$$F(\{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\}) \subset \overline{\mathbb{D}}, \text{ d.h. } F(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}.$$

Als biholomorphe Abbildung ist $f$ nicht konstant.

$\Rightarrow$ $F$ ist nicht konstant

$\xRightarrow[\text{satz}]{\text{Offenheits-}}$ $F(\mathbb{D})$ ist offen.

$\Rightarrow$ $F(\mathbb{D}) = F(\mathbb{D})^\circ \subset \overline{\mathbb{D}}^\circ = \mathbb{D}$ ($\mathbb{D}$ ist regulär offen)

Also gilt sogar: $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.

Völlig analog erhalten wir eine holomorphe Abbildung

$$\tilde{F} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

mit $\tilde{F}|_G = f^{-1}$ (führe obige Konstruktion mit $f^{-1}$ anstelle von $f$ durch).

Wir berechnen nun:

$$\left(\tilde{F} \circ F\right)\Big|_G = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_G .$$

Da aber $\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\} \subset \mathbb{D}$ diskret ist, folgt aus Stetigkeitsgründen: $\tilde{F} \circ F = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$.

Da wir völlig analog auch $F \circ \tilde{F} = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ erhalten, folgt für das von uns Konstruierte $F$:

$$F : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \text{ ist biholomorph mit } F|_G = f.$$

- Da $F$ insbesondere bijektiv ist, erhalten wir:

$$F\left(\{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\}\right) = F\left(\mathbb{D} \setminus \left(\mathbb{D} \setminus \{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\}\right)\right) \overset{F \text{ bij.}}{=} \underbrace{F(\mathbb{D})}_{=\mathbb{D}} \setminus \underbrace{F(G)}_{=f(G)=G}$$

$$= \mathbb{D} \setminus G = \{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\}.$$

Wir haben also gezeigt:

$$F\left(\{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\}\right) = \{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\}. \tag{$*$}$$

- Wir untersuchen nun genauer, was $F(0)$ ist.

Klar ist zunächst $F(0) \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$.

$\lightning$ $F(0) = \frac{1}{2}$. Wegen $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ gilt

$$F(z) = \exp(i\varphi) \frac{z - w}{\overline{w} z - 1} \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

für ein $w \in \mathbb{D}$ und $\varphi$ mit $0 \le \varphi < 2\pi$.

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = F(0) = \exp(i\varphi)\, w, \quad$ d.h. $\quad w = \frac{\exp(-i\varphi)}{2}$

- Falls nun $F(\frac{1}{2}) = 0$ gilt, ist:

$$0 = F\left(\frac{1}{2}\right) = \exp(i\varphi) \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{\exp(-i\varphi)}{2}}{\frac{\exp(i\varphi)}{4} - 1}$$

$$\Rightarrow \exp(-i\varphi) = 1 \quad \Rightarrow \quad \exp(i\varphi) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$$

Folglich ist $w = \frac{1}{2}$ und wir schließen

$$\frac{3}{4} \overset{(*)}{=} F\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - 1} = -\frac{2}{5} \quad ⚡$$

- Falls $F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ gilt, erhalten wir wegen $F(0) = \frac{1}{2}$ direkt einen Widerspruch gegen die Injektivität von $F$ ⚡

- Falls $F(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ gilt, ist:

$$\frac{3}{4} = F\left(\frac{1}{2}\right) = \exp(i\varphi) \frac{\frac{1}{2} - \frac{\exp(-i\varphi)}{2}}{\frac{\exp(i\varphi)}{4} - 1} = \frac{\frac{\exp(i\varphi)}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\exp(i\varphi)}{4} - 1}$$

Mit $\exp(i\varphi) = x$ lösen wir auf:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{\frac{x}{4} - 1}\right) \iff \frac{3}{2}\left(\frac{x}{4} - 1\right) = x - 1$$

$$\iff \frac{5}{8}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\iff x = -\frac{4}{5}$$

Also folgt $\exp(i\varphi) = -\frac{4}{5}$ ⚡ $|\exp(i\varphi)| = 1$

Da wir in jedem Fall einen Widerspruch erhalten, folgt $F(0) \neq \frac{1}{2}$.

↯ $F(0) = \frac{3}{4}$. Völlig analog ist

$$F(z) = \exp(i\varphi) \frac{z-w}{\bar{w}z-1} \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

für ein $w \in \mathbb{D}$ und $\varphi$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$.

$\Rightarrow \frac{3}{4} = F(0) = \exp(i\varphi)w$, d.h. $w = \frac{3\exp(-i\varphi)}{4}$.

- Falls $F\left(\frac{3}{4}\right) = 0$ gilt, ist

$$0 = F\left(\frac{3}{4}\right) = \exp(i\varphi) \frac{\frac{3}{4} - \frac{3\exp(-i\varphi)}{4}}{\frac{9\exp(i\varphi)}{16} - 1}$$

$$\Rightarrow \exp(-i\varphi) = 1 \Rightarrow \exp(i\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

Folglich ist $w = \frac{3}{4}$ und wir schließen

$$\frac{1}{2} \overset{(*)}{=} F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - 1} = \frac{2}{5} \qquad ↯$$

- Falls $F\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$ gilt, ist:

$$\frac{1}{2} = F\left(\frac{3}{4}\right) = \exp(i\varphi) \frac{\frac{3}{4} - \frac{3\exp(-i\varphi)}{4}}{\frac{9\exp(i\varphi)}{16} - 1} = \frac{\frac{3\exp(i\varphi)}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{9\exp(i\varphi)}{16} - 1}.$$

Mit $\exp(i\varphi) = x$ lösen wir auf:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{\frac{9}{16}x-1}\right) \iff \frac{9}{16}x - 1 = \frac{3}{2}(x-1)$$

$$\iff \frac{15}{16}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\iff x = \frac{8}{15}$$

Also folgt $\exp(i\tau) = \frac{8}{15}$ $\lightning$ $|\exp(i\tau)| = 1$.

- Falls $F\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$ gilt, erhalten wir wegen $F(0) = \frac{3}{4}$ direkt einen Widerspruch gegen die Injektivität von $F$ $\lightning$

Da wir in jedem Fall einen Widerspruch erhalten, folgt $F(0) \neq \frac{3}{4}$.

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ $F(0) = 0$. und folglich $F\left(\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$

- Wir Können also das Lemma von Schwarz anwenden:

$\Longrightarrow$ $|F(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$

$\overset{\text{insb.}}{\Longrightarrow}$ $\left|F\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ also wegen $F\left(\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$:

$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, d.h. insbesondere $\left|F\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$

Also folgt weiterhin aus dem Lemma von Schwarz:

$\exists\ \tau \in S^1$ mit $F(z) = \tau \cdot z \quad \forall z \in \mathbb{D}$.

Wegen $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ist aber zwingend $\tau = 1$

$\Rightarrow F = id_{\mathbb{D}} \Rightarrow f = id_G$ (da $f = F|_G$).

Wir haben also bewiesen:

$$\mathrm{Aut}\left(\mathbb{D}\setminus\{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\}\right) = \{\mathrm{id}\}$$ ok.

(ii) • Wir verschieben das Problem zunächst in den Nullpunkt. Nach Vorlesung gilt für

$$h: \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad z \mapsto \frac{z-p}{\bar{p}z-1} : \quad h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}).$$

Es ist $h(p) = 0$, $h(0) = p$ und $h \circ h = \mathrm{id}$.

Wir definieren

$$f_1 := h \circ f \circ h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}), \qquad g_1 := h \circ g \circ h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}).$$

und berechnen:

$$f_1(0) = h(f(h(0))) = h(f(p)) \overset{\text{Voraussetzung}}{=} h(g(p)) = h(g(h(0)))$$
$$= g_1(0)$$

$$f_1'(0) = (h \circ f \circ h)'(0) = h'(f(h(0))) \cdot f'(h(0)) \cdot h'(0)$$
$$= h'(f(p)) \cdot f'(p) \cdot h'(0)$$
$$\overset{\text{Voraussetzung}}{=} h'(g(p)) \cdot g'(p) \cdot h'(0)$$
$$= h'(g(h(0))) \cdot g'(h(0)) \cdot h'(0)$$
$$= (h \circ g \circ h)'(0)$$
$$= g_1'(0).$$

Es genügt zu zeigen, dass $f_1 = g_1$ gilt, denn dann:

$$h \circ f \circ h = f_1 = g_1 = h \circ g \circ h$$

$$\xRightarrow{\text{Aut}(\mathbb{D}) \text{ Gruppe}} f = g.$$

ok.

- Wir betrachten nun

$$F := g_1^{-1} \circ f_1 \in \text{Aut}(\mathbb{D}).$$

Es ist $F(0) = g_1^{-1} \circ f_1(0) = 0$ wegen $f_1(0) = g_1(0)$.

Außerdem ist $\forall z \in \mathbb{D}$:

$$1 = \text{id}'(z) = (g_1^{-1} \circ g_1)'(z) = (g_1^{-1})'(g_1(z)) \cdot g_1'(z)$$

$\Rightarrow g_1'(z) \neq 0$ und folglich:

$$(g_1^{-1})'(g_1(z)) = \frac{1}{g_1'(z)} \qquad (*).$$

Damit:

$$F'(0) = (g_1^{-1} \circ f_1)'(0) = (g_1^{-1})'(\underbrace{f_1(0)}_{=g_1(0)}) \cdot \underbrace{f_1'(0)}_{=g_1'(0)}$$

$$= (g_1^{-1})'(g_1(0)) \cdot g_1'(0)$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{g_1'(0)} \cdot g_1'(0) = 1.$$

Wir Können also mit dem Lemma von Schwarz schließen:

$$\exists \gamma \in S^1 \text{ mit } F(z) = \gamma \cdot z \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Da wir sogar $F'(0) = 1$ haben (ohne Beträge ...), folgt:

$$\gamma = F'(0) = 1.$$

$$\Rightarrow \quad F = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$$

$$\Rightarrow \quad f_1 = g_1$$

$\blacksquare$