Funktionentheorie I, SoSe 2013 - Lösung Blatt 11

11.1. (i) Offenbar ist $0 \in \mathbb{C}$ die einzige isolierte Singularität von f_1, d.h. wir haben

$$f_1 : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Wir können die nach Vorlesung holomorphe Funktion

$$\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit dem Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor in eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe um 0 entwickeln:

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(Tatsächlich gilt nach Vorlesung $\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$ aber dieses Wissen benötigen wir für unsere Zwecke nicht, da uns alleine $\sin(0)$ und $\sin'(0)$ ausreichen!)

Wir haben:

$$a_0 = \frac{\sin^{(0)}(0)}{0!} = \sin(0) = 0$$

Also folgt:

$$\sin(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^{k+1} = z \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^k}_{=: g(z)}.$$

Wir haben also eine holomorphe Funktion

$$g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

konstruiert, mit

$$\sin(z) = z \cdot g(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Auf $\mathbb{C}^\times$ erhalten wir damit

$$f_1(z) = \frac{\sin(z)}{z} = \frac{z \cdot g(z)}{z} = g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^\times.$$

$\Longrightarrow$ f_1 ist holomorph fortsetzbar in $0 \in \mathbb{C}$, die holomorphe Fortsetzung ist g und wir berechnen

$$g(0) = a_1 = \frac{\sin^{(1)}(0)}{1!} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

(ii) Offenbar ist $0 \in \mathbb{C}$ die einzige isolierte Singularität von f_2:

$$f_2: \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Es ist

$$f_2(z) = \frac{\cos(z)}{z} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^\times$$

und $\cos(0) = 1 \neq 0$.

$\overset{\text{per Definition!}}{\Longrightarrow}$ f_2 besitzt in 0 einen Pol der Ordnung 1.

(iii) Da der Hauptzweig des Logarithmus auf $\mathbb{C}^-$ definiert ist, folgt für den Definitionsbereich von f_3:

$$f_3 : \mathbb{C} \setminus ((-\infty,-1] \cup \{0\}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ $0 \in \mathbb{C}$ ist die einzige isolierte Singularität von f_3.

Nach Aufgabe 6.1. (ii) ist

$$\log(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (z-1)^k \qquad \text{für } |z-1| < |1| = 1$$

die Potenzreihenentwicklung des Hauptzweiges des Logarithmus. (in $1 \in \mathbb{C}$)

Wir haben also für $|z| < 1$:

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k = z \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{k+1} z^k}_{=: g(z)}$$

Also haben wir eine holomorphe Funktion

$$g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$$

so dass

$$\log(1+z) = z \cdot g(z) \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

und $g(0) = \frac{(-1)^2}{1} = 1 \neq 0$ gilt.

Auf der offenen Umgebung $\mathbb{D}$ der isolierten Singularität

0 von f_3 berechnen wir also:

$$f_3(z) = \frac{\log(1+z)}{z^2} = \frac{z \cdot g(z)}{z^2} = \frac{g(z)}{z}.$$

Wegen $g(0) \neq 0$ erhalten wir also per Definition:

f_3 besitzt in 0 einen Pol der Ordnung 1.

(iv) Nach Aufgabe 10.1. (i) gilt

$$\sin(z) = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}.$$

Also erhalten wir als Definitionsbereich von f_4:

$$f_4 : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Alle Punkte aus $\pi\mathbb{Z}$ sind also isolierte Singularitäten von f_4.
Sei $k \in \mathbb{Z}$ fixiert. Wir definieren unter Verwendung der aus Analysis I bekannten Funktion

$$\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}$$

die Folgen

$$a_n := k \cdot \pi + \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{sowie} \quad b_n := k\pi + \arcsin\left(-\frac{1}{n}\right).$$

Wegen der Stetigkeit von arcsin folgt dann:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = k \cdot \pi + \arcsin(0) = k \cdot \pi \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} b_n = k\pi + \arcsin(0) = k\pi.$$

Wir haben also zwei Folgen konstruiert, die gegen die interessante Stelle $k\pi \in \mathbb{C}$ konvergieren. Nun ist:

$$\sin(a_n) = \sin\left(k\pi + \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\overset{\text{Add.thm.}}{=} \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \cos(k\pi)\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \cos(k\pi) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= (-1)^k \cdot \frac{1}{n}$$

Völlig analog folgt:

$$\sin(b_n) = \dots = (-1)^k \cdot \frac{-1}{n} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{n}.$$

- Für $|k|$ gerade folgt:

$$\lim_{n\to\infty} f_4(a_n) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{\sin(a_n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \exp(n) \overset{\text{Analysis I}}{=} \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} f_4(b_n) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{\sin(b_n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \exp(-n) = 0$$

$\Rightarrow$ f_4 besitzt in $k\pi$ keine hebbare Singularität (denn sonst liefern beide Grenzwerte zusammen einen Widerspruch gegen die Stetigkeit der Fortsetzung).

und f_4 besitzt in $k\pi$ keinen Pol (da sonst nach Vorlesung $\lim_{z\to k\pi} f(z) = \infty$ gelten würde, also ein Widerspruch zum zweiten Grenzwert).

$\Rightarrow$ f_4 besitzt in $k\pi$ wesentliche Singularität

- Für $|k|$ ungerade erhalten wir ganz analog:

$$\lim_{n\to\infty} f_4(a_n) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{\sin(a_n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \exp(-n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f_4(b_n) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{\sin(b_n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \exp(n) = \infty.$$

Also liefert wörtlich dasselbe Argument wie eben, dass f_4 in $k\pi$ eine wesentliche Singularität besitzt.

<u>Insgesamt:</u> f_4 besitzt in jedem Punkt aus $\pi\mathbb{Z}$ eine wesentliche Singularität.

$\blacksquare$

11.2. (i) • Zunächst gibt es ein $R > 0$ so dass f auf $B_R(p) \subset G$ nur p als Nullstelle besitzt.
Denn: Falls nicht, gäbe es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine von p verschiedene Nullstelle $p_n \in B_{\frac{1}{n}}(p) \setminus \{p\}$, d.h. die Nullstellenmenge von f besäße mit $p \in G$ einen Häufungspunkt in G. Wegen $f \neq 0$ nach Voraussetzung widerspricht dies dem Identitätssatz. ok.

• Es ist also

$$\frac{1}{f} : B_R(p) \setminus \{p\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{f(z)}$$

eine wohldefinierte holomorphe Funktion auf einer offenen Umgebung um p.
Nach dem Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor können wir f um p in eine auf $B_R(p)$ konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-p)^k \qquad z \in B_R(p)$$

entwickeln. Da f in p eine Nullstelle der Ordnung $m \geq 1$ besitzt, gilt

$$a_k = \frac{f^{(k)}(p)}{k!} = 0 \quad \forall\, 0 \leq k < m, \quad a_m = \frac{f^{(m)}(p)}{m!} \neq 0.$$

Wir Können also berechnen:

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-p)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} (z-p)^{m+k}$$

$$= (z-p)^m \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} (z-p)^k}_{=: g(z)}$$

Es gibt also eine holomorphe Funktion

$$g: B_R(p) \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $f(z) = (z-p)^m g(z) \quad \forall z \in B_R(p)$ und

$$g(p) = a_m \neq 0.$$

Ferner folgt für $z \in B_R(p) \setminus \{p\}$:

$$0 \neq f(z) = (z-p)^m \cdot g(z) \qquad \Rightarrow g(z) \neq 0.$$

Also besitzt g auf ganz $B_R(p)$ Keine Nullstelle, so dass

$$h := \frac{1}{g} : B_R(p) \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine wohldefinierte holomorphe Funktion ist, mit

$$f(z) = \frac{(z-p)^m}{h(z)} .$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(z)} = \frac{h(z)}{(z-p)^m} \quad \text{auf } B_R(p) \setminus \{p\}.$$

Da aber h nach Konstruktion auf ganz $B_R(p)$ holomorph ist, mit $h(p) = \frac{1}{g(p)} \neq 0$, folgt direkt aus der Definition:

$\frac{1}{f}$ besitzt in p einen Pol der Ordnung m. ok.

(ii) • Nach Voraussetzung besitzt f in p einen Pol der Ordnung $m \geq 1$

$\overset{\text{Vorlesung}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{z \to p} f(z) = \infty$.

$\Rightarrow \exists\, R > 0$, so dass f auf $B_R(p) \setminus \{p\}$ keine Nullstelle besitzt.

Denn: Falls nicht, gäbe es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Nullstelle $p_n \in B_{\frac{1}{n}}(p) \setminus \{p\}$ von f. $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wäre also eine gegen p konvergente Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} f(p_n) = 0$. Dies stünde aber im Widerspruch zu obigem Grenzwert. ok.

- Es ist also

$$\frac{1}{f} : B_R(p) \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{1}{f(z)}$$

eine wohldefinierte holomorphe Funktion auf einer offenen Umgebung um p.

Da f in p einen Pol der Ordnung $m \geq 1$ besitzt, gilt nach Definition

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-p)^m} \qquad \forall\, z \in B_R(p) \setminus \{p\}$$

für eine auf $B_R(p)$ holomorphe Funktion g mit

$$g(p) \neq 0.$$

$\Rightarrow$ Aus Stetigkeitsgründen besitzt g auf einer kleinen offenen Umgebung um p keine Nullstelle, d.h. indem wir $R > 0$ ggf. verkleinern, dürfen wir davon ausgehen, dass g auf ganz $B_R(p)$ nullstellenfrei ist.

$\Rightarrow$ Auf $B_R(p)\setminus\{p\}$ ist:

$$\frac{1}{f(z)} = (z-p)^m \cdot \frac{1}{g(z)}$$

Da die rechte Seite auf ganz $B_R(p)$ holomorph ist, kann also $\frac{1}{f}$ in p holomorph fortgesetzt werden und die holomorphe Fortsetzung ist gerade durch die rechte Seite gegeben.

Indem wir $\frac{1}{g}$ auf $B_R(p)$ in eine Potenzreihe

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-p)^k \quad \text{mit } a_0 \neq 0$$

entwickeln, folgt:

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=m}^{\infty} a_{k-m} (z-p)^k \qquad \forall z \in B_R(p)$$

Also besitzt $\frac{1}{f}$ in p eine Nullstelle der Ordnung m.

ok.

(iii) • Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f: \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

Wegen $\sin(z) = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}$ (vgl. ÜA 10.1. (i))
sind die Nullstellen von f genau die Elemente der Menge

$$N := \left\{ \frac{1}{k\pi} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \right\}$$

Wir behaupten, dass f in 0 eine wesentliche Singularität besitzt.

$\lightning$ f besitzt in 0 eine hebbare Singularität und $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wäre eine holomorphe Fortsetzung. Da $0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt der Menge N ist, folgt dann aus dem Identitätssatz: $F \equiv 0$. Also gilt auch $f \equiv 0$ $\lightning$

$\lightning$ f besitzt in 0 eine Polstelle.

$\overset{\text{Vorlesung}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{z \to 0} f(z) = \infty.$

Aber: $\lim\limits_{k \to \infty} f\left(\frac{1}{k\pi}\right) = 0$ $\lightning$ wegen $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k\pi} = 0$.

$\Longrightarrow$ f besitzt eine wesentliche Singularität in 0. ok.

- Nun liegt wegen $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k\pi} = 0$ aber in jeder beliebigen offenen Umgebung U um 0 ein Element der Menge N, also eine Nullstelle von f.

$\Rightarrow \nexists$ offene Umgebung U um 0, auf der $\frac{1}{f}$ wohldefiniert ist.

Die Funktion f ist also ein Gegenbeispiel zur angegebenen Aussage $\overset{\nabla}{!}$

ok.

- Der Grund dafür, dass f ein Gegenbeispiel ist, ist offenbar der, dass 0 keine isolierte Singularität von $\frac{1}{f}$ ist. Dieses Problem wird von der Nullstellenmenge von f verursacht, die in 0 einen Häufungspunkt besitzt, so dass sich in 0 die Polstellen von $\frac{1}{f}$ häufen.
Wir haben also die Hoffnung, dass dieses Phänomen das einzige Hinderniss gegen die Aussage ist und behaupten, dass folgende Aussage gilt:

„Eine holomorphe Funktion $f: G \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$, deren Nullstellen sich in p nicht häufen, hat genau dann eine wesentliche Singularität in p, wenn auch die auf einer offenen

Umgebung um p wohldefinierte Funktion $\frac{1}{f}$ in p eine wesentliche Singularität besitzt."

Dazu: • Sei $f: G\setminus\{p\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, deren Nullstellen sich in p nicht häufen und die in p eine wesentliche Singularität besitzt.

$\Rightarrow \exists R > 0$, so dass f auf $B_R(p)\setminus\{p\}$ keine Nullstelle besitzt (sonst besäße die Menge der Nullstellen p als Häufungspunkt).

$\Rightarrow$ Es ist

$$\frac{1}{f}: B_R(p)\setminus\{p\} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{1}{f(z)}$$

eine wohldefinierte holomorphe Funktion.

$\lightning$ $\frac{1}{f}$ besitzt in p eine hebbare Singularität. Dann kann die Fortsetzung in p keine Nullstelle besitzen, da sonst $f = \frac{1}{\frac{1}{f}}$ in p nach Teil (i) einen Pol besäße. Sei F diese Fortsetzung. Dann gilt also

$$F(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_R(p).$$

$\Rightarrow \frac{1}{F(z)} = f(z) \quad \forall z \in B_R(p)\setminus\{p\}$, d.h. $\frac{1}{F}$ ist holomorphe

Fortsetzung von f in p ↯ f besitzt in p wesentliche Singularität.

↗ $\frac{1}{f}$ besitzt in p einen Pol.

Nach Teil (ii) besitzt dann aber $f = \frac{1}{\frac{1}{f}}$ in p eine hebbare Singularität. ↯

$\Rightarrow$ $\frac{1}{f}$ besitzt in p wesentliche Singularität. ok.

- Für die umgekehrte Richtung bemerken wir nur, dass $\frac{1}{f}$ offenbar keine Nullstellen besitzt. Wir können also obiges Argument mit $\frac{1}{f}$ anstatt f anwenden und erhalten:

$\frac{1}{f}$ hat in p wesentliche Singularität $\Rightarrow$ f hat in p wesentliche Singularität

$\blacksquare$

<u>Bemerkung:</u> Wenn wir die Verkleinerung des Definitionsbereichs vernachlässigen, ergibt sich folgende Übersicht zu isolierten Singularitäten:

f		$\frac{1}{f}$
Hebbar mit Wert $\neq 0$	$\longleftrightarrow$	Hebbar mit Wert $\neq 0$
Hebbar mit Nullstelle der Ordnung m	$f \neq 0$	Hebbar mit Nullstelle der Ordnung m
Pol der Ordnung m		Pol der Ordnung m
Wesentliche Singularität	$\longleftrightarrow$ falls isolierte Sing. von f <u>und</u> $\frac{1}{f}$.	Wesentliche Singularität

11.3. Fallunterscheidung:

- Falls f in 0 eine hebbare Singularität besitzt, sei $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die holomorphe Fortsetzung. Da die Menge

$$\{2^{-k} \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$$

$0 \in \mathbb{C}$ als Häufungspunkt besitzt und $\mathbb{C}$ offenbar ein Gebiet ist, welches symmetrisch zur reellen Achse ist, folgt aus Aufgabe 10.1. (ii):

$$F(z) \in \mathbb{R} \qquad \forall\ z \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere folgt für $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$f(z) = F(z) \in \mathbb{R}.$$

- Falls f in 0 eine Polstelle besitzt, gibt es nach Aufgabe 11.2. (ii) ein $R > 0$, so dass

$$\frac{1}{f} : B_R(0) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine wohldefinierte, holomorphe und in $0 \in B_R(0)$ durch $0 \in \mathbb{R}$ holomorph fortsetzbare Funktion ist. Bezeichne

$$F: B_R(0) \longrightarrow \mathbb{C}$$

die entsprechende Fortsetzung. Dann hat die Menge

$$\{2^{-k} \mid k \in \mathbb{N}\} \cap B_R(0)$$

auf der F reelle Werte annimmt (wg. $F(2^{-k}) = f(2^{-k})^{-1} \in \mathbb{R}$) mit $0 \in B_R(0)$ einen Häufungspunkt in $B_R(0)$. Da ferner $B_R(0)$ offenbar symmetrisch zur reellen Achse ist, folgt aus Aufgabe 10.1. (ii) angewandt auf F:

$$F(z) \in \mathbb{R} \qquad \forall\, z \in B_R(0) \cap \mathbb{R}.$$

Insbesondere folgt also

$$\frac{1}{f(z)} \in \mathbb{R} \qquad \forall\, z \in (B_R(0) \setminus \{0\}) \cap \mathbb{R}$$

und damit

$$f(z) \in \mathbb{R} \qquad \forall\, z \in (B_R(0) \setminus \{0\}) \cap \mathbb{R}.$$

Da die Menge $(B_R(0) \setminus \{0\}) \cap \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^\times$ sicherlich einen Häufungspunkt in $\mathbb{C}^\times$ besitzt und $\mathbb{C}^\times$ symmetrisch zur reellen Achse ist, erhalten wir aus Aufgabe 10.1. (ii) angewandt auf f:

$$f(z) \in \mathbb{R} \qquad \forall\, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- Falls f in 0 eine wesentliche Singularität besitzt, gilt die Aussage nicht unbedingt. Wir machen uns das am Beispiel der Funktion

$$f : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto i \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$$

Klar. Wegen $\sin(z) = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}$ (vgl. ÜA 10.1. (i))
besitzt f genau in den Elementen der Menge

$$\left\{ \frac{1}{k} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \right\} \subset \mathbb{C} \qquad (*)$$

Nullstellen. Insbesondere gilt

$$f(2^{-k}) = f\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0 \in \mathbb{R} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ferner besitzt f in $0 \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität.

↯ f besitzt in 0 eine hebbare Singularität und
$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei die holomorphe Fortsetzung. Da wegen
$(*)$ die Menge der Nullstellen von F den Häufungspunkt
$0 \in \mathbb{C}$ besitzt, folgt aus dem Identitätssatz: $F \equiv 0$.
$\Rightarrow f \equiv 0$ ↯

↯ f besitzt in 0 einen Pol.
$\overset{\text{Vorlesung}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{z \to 0} f(z) = \infty$
Nach $(*)$ gilt jedoch $\lim\limits_{k \to \infty} f\left(\frac{1}{k}\right) = 0$ ↯ wegen $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$.

Also besitzt f in 0 tatsächlich eine wesentliche Singularität und Kommt folglich für unsere Betrachtung in Frage.

Wegen

$$f(2) = i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \notin \mathbb{R}$$

nimmt aber f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht nur reelle Werte an und ist folglich ein Gegenbeispiel. $\blacksquare$