Funktionentheorie I, SoSe 2013 – Lösung Blatt 12

12.1. • Vorab halten wir fest: Da in der Situation aus der Aussage stets $|\exp \circ f|$ stetig auf $\partial B_r(p)$ ist und $\partial B_r(p)$ eine kompakte Menge ist, folgt aus dem Satz vom Maximum und Minimum für die rechte Seite der Ungleichung:

$$\sup_{\partial B_r(p)} |\exp \circ f| = \max_{\partial B_r(p)} |\exp \circ f| < \infty . \qquad (*)$$

Nun führen wir eine Fallunterscheidung durch:

• Habe f in p eine hebbare Singularität.
Der Einfachheit halber bezeichnen wir die holomorphe Fortsetzung in p ebenfalls mit f, d.h. es ist

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{holomorph} .$$

In dieser Situation folgt aus dem Maximumsprinzip:

$$|\exp \circ f(z)| \leq \max_{\partial B_r(p)} |\exp \circ f| \qquad \forall z \in B_r(p) .$$

Damit erhalten wir:

$$\sup_{B_r(p) \setminus \{p\}} |\exp \circ f| \leq \max_{\partial B_r(p)} |\exp \circ f|$$

d.h. die Aussage ist in diesem Fall stets richtig. ok.

- Habe f in p einen Pol.

Dann gibt es (vgl. Aufgabe 11.2. (ii)) eine offene Umgebung $U \subset B_r(p)$ um p, so dass f auf $U \setminus \{p\}$ nullstellenfrei ist, d.h.

$$\frac{1}{f} : U \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist wohldefiniert und nach Aufgabe 11.2. (ii) in p durch den Wert 0 holomorph fortsetzbar. Da f in p einen Pol besitzt ist $\frac{1}{f}$ nicht Konstant, so dass aus dem Offenheitssatz folgt:

$$\frac{1}{f}\left(U \setminus \{p\}\right) = V \setminus \{0\}$$

für eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{C}$ der 0.

Nun besitzt die Funktion

$$g : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto g(z) := \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

nach Vorlesung eine wesentliche Singularität in 0.

Nach dem Satz von Casorati-Weierstraß ist daher

$$g\left(V \setminus \{0\}\right) \subset \mathbb{C}$$

dicht. Dann ist aber auch

$$\exp\circ f\left(B_r(p)\setminus\{p\}\right) \supset \exp\circ f\left(U\setminus\{p\}\right) = \left(g\circ\tfrac{1}{f}\right)\left(U\setminus\{p\}\right)$$

$$= g\left(V\setminus\{0\}\right)$$

dicht in $\mathbb{C}$ und damit insbesondere unbeschränkt, so dass folgt:

$$\sup_{B_r(p)\setminus\{p\}} |\exp\circ f| = \infty$$

Wegen $(*)$ ist die Aussage in diesem Fall also stets falsch. ok.

- Habe f in p eine wesentliche Singularität.

Dann ist nach dem Satz von Casorati-Weierstraß

$$f\left(B_r(p)\setminus\{p\}\right) \subset \mathbb{C}$$

dicht, d.h. $\mathbb{C} = \overline{f\left(B_r(p)\setminus\{p\}\right)}$. Damit folgt:

$$\mathbb{C}^* = \exp(\mathbb{C}) = \exp\left(\overline{f(B_r(p)\setminus\{p\})}\right) \overset{\exp \text{ stetig}}{\subset} \overline{\exp\left(f(B_r(p)\setminus\{p\})\right)}.$$

Also:

$$\mathbb{C} = \overline{\mathbb{C}^*} \subset \overline{(\exp\circ f)(B_r(p)\setminus\{p\})} \subset \mathbb{C}$$

Es ist also

$$\overline{(\exp\circ f)(B_r(p)\setminus\{p\})} = \mathbb{C}$$

d.h. $(\exp\circ f)(B_r(p)\setminus\{p\})$ ist dicht in $\mathbb{C}$ und damit insbesondere unbeschränkt, so dass wie eben folgt:

$$\sup_{B_r(p)\setminus\{p\}} |\exp\circ f| = \infty$$

Wegen (*) ist die Aussage also auch in diesem Fall stets falsch.

$\blacksquare$

12.2. (i) $\Rightarrow$ (ii): Seien f und g teilerfremd in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

$\nearrow$ $p \in \mathbb{C}$ wäre eine gemeinsame Nullstelle von f und g.

$\xRightarrow[\text{entwicklung}]{\text{Potenzreihen-}}$ $\exists\, f_1, g_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit

$$f(z) = (z-p) f_1(z) \quad \text{sowie} \quad g(z) = (z-p) g_1(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$\Rightarrow$ $(z-p) \mid f$ und $(z-p) \mid g$, d.h. $(z-p)$ ist ein nichttrivialer gemeinsamer Teiler von f und g $\lightning$

Also besitzen f und g keine gemeinsamen Nullstellen. ok.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): • Es seien

$$N_f := \{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0 \} \quad \text{und} \quad N_g := \{ z \in \mathbb{C} \mid g(z) = 0 \}$$

die Nullstellenmengen von f bzw. g. Nach Voraussetzung ist N_f sowie N_g diskret in $\mathbb{C}$ (da $f \neq 0$ und $g \neq 0$) und es gilt $N_f \cap N_g = \emptyset$.

• Damit ist $\frac{1}{fg}$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, mit Polstellen genau in den Punkten aus $N_f \cup N_g$. Für $w \in N_f \cup N_g$ sei $h_w \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{w\})$ der Hauptteil der Funktion $\frac{1}{fg}$ in w. Dann ist

$$\{h_w \mid w \in N_f\}$$

eine Hauptteilverteilung auf $\mathbb{C}$ (beachte: $N_f \subset \mathbb{C}$ diskret).
Nach dem Satz von Mittag-Leffler (Satz 4.5.) existiert also eine meromorphe Funktion $\psi \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ welche genau in den $w \in N_f$ die Hauptteile h_w besitzt und ansonsten holomorph ist.

- In $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ berechnen wir nun (beachte, dass $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ ein Körper ist):

$$1 = 1 - \psi fg + \psi fg = \left(\frac{1}{fg} - \psi\right) g \cdot f + (\psi f) \cdot g$$

$$= a \cdot f + b \cdot g$$

mit

$$a := \left(\frac{1}{fg} - \psi\right) g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$$

$$b := \psi f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}).$$

Es genügt also zu zeigen, dass sogar $a, b \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ gilt.

- Wir betrachten zunächst $a \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Offenbar ist a außerhalb der Menge $N_f \cup N_g$ holomorph.

Da wir in $\mathcal{M}(\mathbb{C})$

$$a = \left(\frac{1}{fg} - \psi\right) g = \frac{1}{f} - \psi g$$

erhalten, sehen wir, dass a sogar auf $\mathbb{C} \setminus N_f$ holomorph ist. Sei nun $w \in N_f$ beliebig. Dann gibt es eine Umgebung U um w mit $U \cap N_f = \{w\}$ und so dass

$$\frac{1}{fg} - h_w$$

auf U holomorph ist (Definition des Hauptteils).

Indem wir U gegebenenfalls um w herum verkleinern ist auch

$$\psi - h_w$$

auf U holomorph, da nach Konstruktion von ψ gerade h_w der Hauptteil von ψ im Punkt w ist.

Damit können wir aber auf $U \setminus \{w\}$ berechnen:

$$a = \left(\frac{1}{fg} - \psi\right) g = \left(\frac{1}{fg} - h_w + h_w - \psi\right) g$$

$$= \left(\left(\frac{1}{fg} - h_w\right) - \left(\psi - h_w\right)\right) g$$

Da die Funktion auf der rechten Seite nach obiger Überlegung im Punkt w holomorph fortsetzbar ist, folgt: a ist in $w \in N_f$ holomorph fortsetzbar.

$\overset{w \in N_f}{\underset{\text{beliebig}}{\Longrightarrow}}$ $a \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

- Nun betrachten wir $b \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Offenbar ist b auf $\mathbb{C} \setminus N_f$ holomorph. Sei also $w \in N_f$ beliebig. Dann gibt es eine offene Umgebung U um w mit $N_f \cap U = \{w\}$ und da f und g keine gemeinsame Nullstelle besitzen gilt nach einer Verkleinerung von U um w: $N_g \cap U = \emptyset$.

  Nun besitzt f in w eine Nullstelle einer Ordnung m.

  $\overset{\text{Potenzreihen-}}{\underset{\text{entwicklung}}{\Longrightarrow}}$ $\exists\, f_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $f(z) = (z-w)^m f_1(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$ und es gilt $f_1(w) \neq 0$. $\quad (*)$

  Insbesondere besitzt nach Aufgabe 11.2. (i) die Funktion $\frac{1}{f}$ in w einen Pol der Ordnung m. Es gilt also auf $U \setminus \{w\}$:

  $$\frac{1}{f(z)} = \frac{\tilde{f}(z)}{(z-w)^m}$$ für eine Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ mit $\tilde{f}(w) \neq 0$.

$\overset{g \text{ auf } U}{\underset{\text{nullstellenfrei}}{\Longrightarrow}}$ Auf $U \setminus \{w\}$ gilt

$$\frac{1}{fg}(z) = \frac{\frac{\tilde{f}(z)}{g(z)}}{(z-w)^m}$$

und es ist $\frac{\tilde{f}}{g} \in \mathcal{O}(U)$ mit $\frac{\tilde{f}(w)}{g(w)} \neq 0$.

$\Rightarrow$ Auch $\frac{1}{fg}$ besitzt im Punkt w einen Pol der Ordnung m.

Wir erhalten aus dieser Überlegung nun die Information, dass der Hauptteil h_w von $\frac{1}{fg}$ in w folgende Gestalt hat:

$$h_w(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{(z-w)^j} \qquad \text{auf } \mathbb{C} \setminus \{w\}$$

für gewisse $c_j \in \mathbb{C}$.

Da nach Konstruktion auch Ψ in w den Hauptteil h_w besitzt, erhalten wir

$$\varphi := \Psi - h_w \in \mathcal{O}(U)$$

Damit können wir auf der Umgebung U um die interessante Stelle w berechnen: $(z \in U \setminus \{w\})$

$$b(z) = \Psi(z) f(z) \overset{(*)}{=} \Big(\chi(z) + h_w(z)\Big)(z-w)^m f_1(z)$$

$$= \chi(z)(z-w)^m f_1(z) + f_1(z) \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j (z-w)^m}{(z-w)^j}$$

$$= \underbrace{\chi(z)(z-w)^m f_1(z)}_{\text{holomorph auf ganz } U} + \underbrace{f_1(z) \sum_{j=1}^{m} c_j (z-w)^{m-j}}_{\text{holomorph auf ganz } U \text{, da stets } m-j \geq 0 \text{ gilt !}}$$

Also ist b in w holomorph fortsetzbar.

$\xRightarrow[\text{beliebig}]{w \in N_f}$ $b \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

- Wir haben also geeignete $a, b \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ konstruiert, so dass $af + bg = 1$ gilt. ok.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Es gelte $af + bg = 1$ für gewisse $a, b \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Sei $c \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ein gemeinsamer Teiler von f und g:

$$c \mid f, \quad c \mid g.$$

$\Rightarrow$ Für gewisse $f_1, g_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ gilt

$$cf_1 = f \quad \text{sowie} \quad cg_1 = g.$$

$$\Rightarrow 1 = af + bg = acf_1 + bcg_1$$

$$= c\,(af_1 + bg_1).$$

$\Rightarrow$ c ist nullstellenfrei auf $\mathbb{C}$, also in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ invertierbar und damit eine Einheit.

Wir sehen also, dass f und g keine nichttrivialen gemeinsamen Teiler besitzen, d.h. f und g sind teilerfremd.

$\blacksquare$

12.3. • Zunächst erhalten wir durch Partialbruchzerlegung:

$$f(z) = \frac{z^2-6}{z^2+5z+6} = \frac{z^2-6}{(z+3)(z+2)}$$

$$= \frac{z}{z+3} - \frac{2}{z+2}$$

$$= f_1(z) + f_2(z)$$

mit $f_1(z) = \frac{z}{z+3}$ sowie $f_2(z) = -\frac{2}{z+2}$.

• Als nächstes führen wir Entwicklungen von f_1 und f_2 durch.

∘ $$f_1(z) = \frac{z}{z+3} = \frac{z}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{-3}} = \frac{z}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{-3}\right)^n \quad \text{für } \left|\frac{z}{-3}\right| < 1$$

$$= \frac{z}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} z^{n+1}$$

Also haben wir:

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n} z^n \quad \text{auf } B_3(0) \qquad (1)$$

∘ $$f_1(z) = \frac{z}{z+3} = \frac{1}{1-\frac{-3}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-3}{z}\right)^n \quad \text{für } \left|\frac{-3}{z}\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n z^{-n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n z^{-n}$$

$$= 1 + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{(-3)^n} z^n$$

Also haben wir:

$$f_1(z) = 1 + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} z^n \qquad \text{auf } \mathcal{B}_{3,\infty}(0) \qquad (2)$$

∘ $$f_2(z) = -\frac{2}{z+2} = -\frac{1}{1-\frac{z}{-2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{-2}\right)^n \quad \text{für } \left|\frac{z}{-2}\right| < 1$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n$$

Also haben wir:

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} z^n \qquad \text{auf } \mathcal{B}_2(0) \qquad (3)$$

∘ $$f_2(z) = -\frac{2}{z+2} = -\frac{2}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{-2}{z}} = -\frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{z}\right)^n \quad \text{für } \left|\frac{-2}{z}\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{z}\right)^{n+1} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{z}{-2}\right)^n$$

Also haben wir:

$$f_2(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n \qquad \text{auf } \mathcal{B}_{2,\infty}(0) \qquad (4)$$

- Mit dieser Vorbereitung erhalten wir leicht die verschiedenen Laurent-Entwicklungen.

(i) Auf $B_2(0)$ folgt mit (1) und (3):

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} z^n$$

$$= -1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n} \right) z^n .$$ ok.

(ii) Auf $B_{2,3}(0)$ folgt mit (1) und (4):

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n$$

$$= \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n + 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} z^n$$ ok.

(iii) Auf $B_{3,\infty}(0)$ folgt mit (2) und (4):

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = 1 + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n$$

$$= \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n} \right) z^n + 1$$ ok.

$\blacksquare$