Funktionentheorie I, SoSe 2013 – Lösung Blatt 2

2.1. (i) Wir schreiben $f = u + iv$ mit

$$u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad u(x+iy) = ax^2 - y$$

$$v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad v(x+iy) = x + by^2.$$

$\Rightarrow$ u und v sind auf ganz $\mathbb{C}$ reell differenzierbar mit

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x+iy) = 2ax \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x+iy) = -1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x+iy) = 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x+iy) = 2by.$$

Also ist f nach Vorlesung in $x+iy \in \mathbb{C}$ genau dann komplex differenzierbar, wenn die Cauchy-Riemann-DGL in $x+iy$ erfüllt sind:

- $\frac{\partial u}{\partial y}(x+iy) = -1 = -\frac{\partial v}{\partial x}(x+iy)$ ist $\forall\, x+iy \in \mathbb{C}$ erfüllt
- $\frac{\partial u}{\partial x}(x+iy) = \frac{\partial v}{\partial y}(x+iy) \Leftrightarrow 2ax = 2by \Leftrightarrow ax = by.$

Fallunterscheidung:

- Falls $a = b = 0$ gilt ist $ax = by$ $\forall\, x+iy \in \mathbb{C}$ erfüllt.
  In diesem Fall ist f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.
  Da $\mathbb{C}$ offen ist, ist $D = \mathbb{C}$ die größte Menge auf der f holomorph ist.
- Sonst: $ax = by \Leftrightarrow \binom{x}{y} \in \mathbb{R} \cdot \binom{b}{a}$, d.h. f ist genau in den Punkten aus der Geraden $\mathbb{R} \cdot \binom{b}{a}$ komplex differenzierbar.

Da für den offenen Kern

$$\left(\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\right)^{\circ} = \emptyset$$

gilt, gibt es keine Menge $D \subset \mathbb{C}$ so dass f auf D holomorph ist.

(ii) u ist reell differenzierbar mit

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x+iy) = 6x^2 - 6y^2 + 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x+iy) = -12xy - 2y - 1.$$

Wir suchen reell differenzierbare Funktionen $v: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, so dass die Cauchy-Riemann-DGL auf ganz $\mathbb{C}$ erfüllt sind. Sei v eine solche Funktion.

$$\overset{\text{CR-DGL}}{\Longrightarrow} \frac{\partial v}{\partial x}(x+iy) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x+iy) = 12xy + 2y + 1.$$

Integration in x für festes y liefert als Stammfunktion:

$$v(x+iy) = 6x^2y + 2xy + x + C(y),$$

Konstante, welche nur von y und nicht von x abhängt.

Da v reell differenzierbar ist, muss auch $C(y)$ als Funktion in y reell differenzierbar sein und wir erhalten:

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x+iy) = 6x^2 + 2x + C'(y) \overset{\text{C-R-DGL}}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(x+iy) = 6x^2 - 6y^2 + 2x.$$

$$\Longrightarrow C'(y) = -6y^2.$$

Integration in y liefert: $C(y) = -2y^3 + \mu$ für eine Konstante $\mu \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow v(x+iy) = 6x^2y + 2xy + x - 2y^3 + \mu$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$.

Da solche v umgekehrt reell differenzierbar sind, mit

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x+iy) = \frac{\partial v}{\partial y}(x+iy) \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y}(x+iy) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x+iy),$$

erhalten wir:

$$\{v: \mathbb{C} \to \mathbb{R} \mid u+iv \in \mathcal{O}(\mathbb{C})\} = \{v(x+iy) = 6x^2y + 2xy + x - 2y^3 + \mu \mid \mu \in \mathbb{C}\}$$

$\blacksquare$

2.2. (i) • Sei $v-\hat{v}$ konstant in G, etwa $v-\hat{v}=\mu$ für $\mu \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ $\hat{v} = v - \mu$ und damit ist

$$u + i\hat{v} = u + iv - i\mu = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{holomorph nach} \\ \text{Voraussetzung}}}{f} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{holomorph da} \\ \text{Konstant}}}{i\mu} \quad \text{holomorph} \qquad \text{ok.}$$

• Sei umgekehrt $u+i\hat{v}$ holomorph.

$\Rightarrow$ $f-(u+i\hat{v})$ ist holomorph (als Linearkombination holomorpher Funktionen).

Es ist

$$g + ih := f - (u+i\hat{v}) = u + iv - u - i\hat{v} = i(v-\hat{v})$$

$\Rightarrow$ $g = 0$ und $h = v - \hat{v}$.

Da $f-(u+i\hat{v})$ holomorph ist, gelten auf G die Cauchy-Riemann-DGL:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(p) = -\frac{\partial g}{\partial y}(p) \overset{g=0}{=} 0 \qquad \forall p \in G$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(p) = \frac{\partial g}{\partial x}(p) \overset{g=0}{=} 0 \qquad \forall p \in G.$$

Es ist also $h: G \to \mathbb{R}$ reell differenzierbar, mit

$$Dh(p) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(p), \frac{\partial h}{\partial y}(p)\right) = 0 \qquad \forall p \in G.$$

Da G als Gebiet zusammenhängend ist, folgt (vgl. z.B. ÜA B9.3. Analysis II): h ist konstant in G.

Also ist $v - \hat{v} = h$ konstant in G. OK.

(ii) • Es ist $f = u + iv$. Wir Können schreiben:

$$u = \mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \bar{f}), \quad v = \mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$$

$$\Rightarrow F := u^2 + i v^2 = \frac{1}{4}\left(f^2 + 2f\bar{f} + \bar{f}^2\right) - \frac{i}{4}\left(f^2 - 2f\bar{f} + \bar{f}^2\right)$$

Damit berechnen wir $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ mit den Rechenregeln des Wirtinger-Kalküls:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(2f \overbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}^{=0} + 2\bar{f} \overbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}^{=0} + 2f \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} + 2\bar{f} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)$$

$$- \frac{i}{4}\left(2f \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}_{=0} - 2\bar{f} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}_{=0} - 2f \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} + 2\bar{f} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(f + \bar{f}) + \frac{i}{2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(f - \bar{f}) = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}(u - v)$$

Da F nach Voraussetzung holomorph ist, haben wir gezeigt:

$$\overline{f'(z)}\,(u(z) - v(z)) = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \quad \forall z \in G. \qquad (*)$$

• ↯ $f'(p) \neq 0$ für ein $p \in G$.

$\Rightarrow$ Aus Stetigkeitsgründen gibt es eine offene Umgebung $U \subset G$ um p mit

$$f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in U.$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad u(z) = v(z) \quad \forall z \in U.$$

Da U eine offene Umgebung um p ist, folgt hieraus:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(p) = \frac{\partial v}{\partial x}(p) \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(p) = \frac{\partial v}{\partial y}(p).$$

Da aber $f = u + iv$ in p auch komplex differenzierbar ist, gilt nach den Cauchy-Riemann-DGL:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(p) = \frac{\partial v}{\partial y}(p) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(p) = -\frac{\partial v}{\partial x}(p)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(p) = \frac{\partial u}{\partial x}(p) = \frac{\partial v}{\partial y}(p) = \frac{\partial u}{\partial y}(p) = -\frac{\partial v}{\partial x}(p)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(p) = 0, \; \frac{\partial u}{\partial y}(p) = 0, \; \frac{\partial v}{\partial x}(p) = 0, \; \frac{\partial v}{\partial y}(p) = 0.$$

Insbesondere folgt also: $f'(p) = \frac{\partial u}{\partial x}(p) + i\frac{\partial v}{\partial x}(p) = 0$ $\lightning_{f'(p)\neq 0}$

$\Rightarrow$ Es ist $f'(z) = 0 \quad \forall z \in G$.

- Wegen $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z)$ folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 0, \; \frac{\partial v}{\partial x}(z) = 0 \quad \forall z \in G$$

und damit mit den Cauchy-Riemann-DGL:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0, \; \frac{\partial v}{\partial y}(z) = 0 \quad \forall z \in G.$$

Also ist

$$Du(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z), \frac{\partial u}{\partial y}(z)\right) = 0, \; Dv(z) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}(z), \frac{\partial v}{\partial y}(z)\right) = 0 \; \forall z \in G$$

Da G Gebiet, folgt wie in (i): u und v sind konstant

$\Rightarrow f$ ist konstant. $\blacksquare$

2.3. Wir schreiben $f = f_1 + i f_2$ sowie $g = g_1 + i g_2$.

- f ist in $p \in D$ total diffbar. Nach Analysis II gilt für das totale Differential:

$$Df(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(p) \end{pmatrix}$$

Wenden wir 1.3. (i) auf die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$Df(p) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (\text{bzw. } \mathbb{C} \to \mathbb{C})$$

an, dann folgt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$Df(p)(z) = \lambda_1 z + \mu_1 \bar{z} \qquad \text{für Konstanten } \lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{C}.$$

Nach 1.3. gilt:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\Big(Df(p)(1) - i\, Df(p)(i)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(p) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(p)\right) - i\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(p) + i \frac{\partial f_2}{\partial y}(p)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p) - i \frac{\partial f}{\partial y}(p)\right) = \frac{\partial f}{\partial z}(p)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\Big(Df(p)(1) + i\, Df(p)(i)\Big) \overset{\text{wie oben}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p) + i \frac{\partial f}{\partial y}(p)\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p)$$

- Völlig analog können wir 1.3. auf das totale Differential von g in $f(p) \in D'$ anwenden und erhalten:

$$Dg(f(p))(z) = \lambda_2 z + \mu_2 \overline{z} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

mit $\lambda_2 = \frac{\partial g}{\partial w}(f(p))$ und $\mu_2 = \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(f(p))$.

- Schließlich wenden wir 1.3. auf das totale Differential von $(g \circ f)$ in $p \in D$ an und erhalten:

$$D(g\circ f)(p)(z) = \lambda_3 z + \mu_3 \overline{z} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

mit $\lambda_3 = \frac{\partial (g\circ f)}{\partial z}(p)$ und $\mu_3 = \frac{\partial (g\circ f)}{\partial \overline{z}}(p)$.

- Nach der reellen Kettenregel gilt:

$$D(g\circ f)(p) = Dg(f(p)) \cdot Df(p) \qquad \text{(Verknüpfung linearer Abbildungen)}$$

Wir berechnen:

$$Dg(f(p)) \circ Df(p)(z) = \lambda_2 (\lambda_1 z + \mu_1 \overline{z}) + \mu_2 \overline{(\lambda_1 z + \mu_1 \overline{z})}$$

$$= \lambda_2 \lambda_1 z + \lambda_2 \mu_1 \overline{z} + \mu_2 \overline{\lambda_1}\, \overline{z} + \mu_2 \overline{\mu_1} z$$

$$= (\lambda_2 \lambda_1 + \mu_2 \overline{\mu_1}) z + (\lambda_2 \mu_1 + \mu_2 \overline{\lambda_1}) \overline{z}$$

Also folgt:

$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial z}(p) = \lambda_3 = \lambda_2 \lambda_1 + \mu_2 \overline{\mu_1}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial w}(f(p)) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(p) + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(f(p)) \cdot \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(p)\right)}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial w}(f(p)) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(p) + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(f(p)) \cdot \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(p) \qquad \text{ok.}$$

Außerdem:

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial\bar z}(p)=\mu_3=\lambda_2\mu_1+\mu_2\overline{\lambda_1}$$

$$=\frac{\partial g}{\partial w}(f(p))\,\frac{\partial f}{\partial\bar z}(p)+\frac{\partial g}{\partial\bar w}(f(p))\cdot\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}(p)\right)}$$

$$=\frac{\partial g}{\partial w}(f(p))\,\frac{\partial f}{\partial\bar z}(p)+\frac{\partial g}{\partial\bar w}(f(p))\cdot\frac{\partial\bar f}{\partial\bar z}(p)$$

ok.

$\blacksquare$