Funktionentheorie I, SoSe 2013 - Lösung Blatt 3

3.1. (i) $\Rightarrow$ (ii)

$(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig konvergent

$\Rightarrow$ $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf ganz $\mathbb{C}$ punktweise konvergent

$\Rightarrow$ (ii) gilt für beliebige paarweise verschiedene $c_0, \dots, c_d \in \mathbb{C}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Implikation gilt, da ein Polynom vom Grad $\leq d$ bereits eindeutig durch seine Werte auf den Punkten $c_0, \dots, c_d$ bestimmt ist. Führen dieses Argument mit Methoden aus der Linearen Algebra aus.

- Stellen zunächst die Methoden aus der Linearen Algebra zusammen.

  Sei $\mathbb{C}[z]_d$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq d$.

  $\Rightarrow$ Die Monome $\mathcal{B} = \{z^0, z^1, z^2, \dots, z^d\}$ bilden Basis, insbesondere ist $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z]_d = d+1$.

  Zu den gegebenen Punkten $c_0, \dots, c_d \in \mathbb{C}$ definieren wir:

$$L_j(z) := \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{d} \frac{z - c_k}{c_j - c_k} \in \mathbb{C}[z]_d \quad \text{für } 0 \leq j \leq d.$$

$\Rightarrow \mathcal{C} = \{L_0, \dots, L_d\}$ ist eine weitere Basis von $\mathbb{C}[z]_d$.

(Denn: Nach Konstruktion ist $L_j(c_\ell) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \ell \neq j \\ 1 & \text{falls } \ell = j \end{cases}$.

Ist also $\sum_{j=0}^{d} \mu_j L_j = 0$ für gewisse $\mu_j \in \mathbb{C}$, dann folgt

für $0 \leq \ell \leq d$ $\quad 0 = \sum_{j=0}^{d} \mu_j L_j(c_\ell) = \mu_\ell$ und folglich

sind die L_j linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{C}[z]_d$.)

Da wir zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ haben, existiert nach Linearer Algebra I eine Basiswechselmatrix

$$M = (m_{ij})_{i,j=0}^{d} \in GL(d+1, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{(d+1)\times(d+1)}$$

d.h. schreiben wir für ein beliebiges $P \in \mathbb{C}[z]_d$

$$P(z) = \sum_{j=0}^{d} \mu_j z^j = \sum_{j=0}^{d} \lambda_j L_j(z)$$

dann gilt stets

$$\begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_d \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix}$$

oder ausgeschrieben:

$$\mu_j = \sum_{k=0}^{d} m_{jk} \lambda_k .$$

Wegen $P(c_k) = \sum_{j=0}^{d} z_j L_j(c_k) = z_k$ für alle $0 \leq k \leq d$ haben wir insgesamt gezeigt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ist } P(z) = \sum_{j=0}^{d} \mu_j z^j \in \mathbb{C}[z]_d \text{, dann folgt:} \\ \mu_j = \sum_{k=0}^{d} m_{jk} P(c_k) \quad \forall\, 0 \leq j \leq d \end{array}\right] (*)$$

- Wir wenden die mit $(*)$ bereitgestellte Lineare Algebra auf unsere Situation an und erhalten für $0 \leq j \leq d$ fest:

$$a_{n,j} = \sum_{k=0}^{d} m_{jk} P_n(c_k) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Da nach Voraussetzung aus (ii) die Folgen $(P_n(c_k))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $0 \leq k \leq d$ konvergieren muss wegen obiger Gleichung und da $m_{jk} \in \mathbb{C}$ gilt auch die Koeffizientenfolge $(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

<u>(iii) $\Rightarrow$ (i)</u>

- Nach Voraussetzung existiert

$$a_j := \lim_{n\to\infty} a_{n,j} \in \mathbb{C} \qquad \text{für } 0 \leq j \leq d$$

und wir definieren das Polynom

$$P(z) := \sum_{j=0}^{d} a_j z^j \in \mathbb{C}[z]_d .$$

Sei nun $R > 0$ beliebig. Für $z \in U_R(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ berechnen wir:

$$|P_n(z) - P(z)| = \left| \sum_{j=0}^{d} a_{n,j} z^j - \sum_{j=0}^{d} a_j z^j \right|$$

$$= \left| \sum_{j=0}^{d} (a_{n,j} - a_j) z^j \right| \leq \sum_{j=0}^{d} |a_{n,j} - a_j| \cdot \underbrace{|z|}_{<R}{}^j$$

$$< \sum_{j=0}^{d} |a_{n,j} - a_j| R^j$$ hier taucht z nicht mehr auf!

$$\Rightarrow |P_n - P|_{U_R(0)} < \sum_{j=0}^{d} |a_{n,j} - a_j| R^j \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da nach Konstruktion $\lim_{n\to\infty} |a_{n,j} - a_j| = 0 \quad \forall\, 0 \leq j \leq d$ gilt, folgt:

$$\lim_{n\to\infty} |P_n - P|_{U_R(0)} = 0$$

$\Rightarrow (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Konvergiert auf $U_R(0)$ gleichmäßig gegen P.

- Ist also $w \in \mathbb{C}$ beliebig, dann ist beispielsweise wegen $w \in U_{2|w|}(0)$ mit $U_{2|w|}(0)$ eine Umgebung um w Konstruiert, auf der $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen P Konvergiert.

$\Rightarrow (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Konvergiert lokal gleichmäßig gegen P. ▨

3.2. Wir behaupten, dass $\mathbb{D} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt.
Für $z \in \mathbb{Z}$ ist $|z| \in \{0, 1, \dots\}$, d.h.

$$n^2 - z^2 = n^2 - |z|^2 = 0 \quad \text{für ein } n \in \{0, 1, \dots\}.$$

Die Reihe ist also überhaupt nur auf $\mathbb{D}$ definiert, so dass es genügt zu zeigen, dass die Reihe auf $\mathbb{D}$ normal Konvergent ist.

Sei also $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Da $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen ist, ist $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ offen und wir Können folglich eine beschränkte Umgebung $U \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ um z_0 wählen (beispielsweise eine Kreisscheibe).

Wir Konstruieren nun auf U eine Konvergente Majorante.
Dazu wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|z|^2 \leq \frac{n_0^2}{2} \qquad \forall z \in U$$

gilt (möglich mit dem archimedischen Axiom von $\mathbb{R}$ und wegen der Beschränktheit von U).

Für $z \in U$ und $n \geq n_0$ schätzen wir nun ab:

$$\left| \frac{1}{n^2 - z^2} \right| = \frac{1}{|n^2 - z^2|} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vierecksun-} \\ \text{gleichung}}}{\leq} \frac{1}{||n^2| - |z^2||} = \frac{1}{|n^2 - |z|^2|}$$

$$= \frac{1}{n^2 - |z|^2} \leq \frac{1}{n^2 - \frac{n^2}{2}} = \frac{2}{n^2}.$$

$|z|^2 \leq \frac{n_0^2}{2} \leq \frac{n^2}{2} < n^2$

Also haben wir gezeigt:

$$\left| z \mapsto \frac{1}{n^2 - z^2} \right|_U \leq \frac{2}{n^2} \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Nach Analysis I ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Konvergent und damit ist das MajorantenKriterium auf U erfüllt.

Wir haben also für alle Punkte $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ Konstruiert, auf der das Majoranten-Kriterium für die vorgelegte Reihe erfüllt ist.

$\Longrightarrow$ Die Reihe ist auf $D = \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ tatsächlich normal Konvergent.

$\blacksquare$

3.3. • Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i}$$

$$= \frac{A(z+i) + B(z-i)}{(z-i)(z+i)} = \frac{(A+B)z + (A-B)i}{z^2+1}$$

Wir erhalten also das Gleichungssystem

$$A + B = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

$$A - B = -i \qquad (\mathrm{II})$$

Setzen wir $A = -B$ aus (I) in (II) ein, dann folgt:

$$2A = -i, \quad \text{d.h.} \quad A = -\frac{i}{2} \quad \text{und} \quad B = \frac{i}{2}.$$

Damit haben wir gezeigt:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{-i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} + \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z+i}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{i}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{i}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{i}} + \frac{1}{1+\frac{z}{i}}\right)$$

• Wir entwickeln den ersten Summanden in eine Potenzreihe um $p \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. Idee: Verwende die geometrische Reihe! Dazu formen wir um:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{i}} = \frac{1}{1-\frac{z-p+p}{i}} = \frac{1}{\left(1-\frac{p}{i}\right)-\frac{z-p}{i}} = \frac{1}{1-\frac{p}{i}} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-p}{i\left(1-\frac{p}{i}\right)}}$$

geometrische Reihe

$$= \frac{1}{1-\frac{p}{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-p}{i\left(1-\frac{p}{i}\right)}\right)^n \quad \text{für} \quad \left|\frac{z-p}{i\left(1-\frac{p}{i}\right)}\right| < 1$$

$$= \frac{1}{1-\frac{p}{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{i^n\left(1-\frac{p}{i}\right)^n} (z-p)^n \quad \text{für} \quad |z-p| < \left|i\left(1-\frac{p}{i}\right)\right|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\left(1-\frac{p}{i}\right)^{n+1}} (z-p)^n \quad \text{für} \quad |z-p| < |i-p|$$

d.h. der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist $|i-p|$.

- Analog entwickeln wir den zweiten Summanden:

$$\frac{1}{1+\frac{z}{i}} = \frac{1}{1-\frac{z-p+p}{-i}} = \frac{1}{\left(1+\frac{p}{i}\right)-\frac{z-p}{-i}} = \frac{1}{1+\frac{p}{i}} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-p}{-i\left(1+\frac{p}{i}\right)}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{p}{i}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-p}{-i\left(1+\frac{p}{i}\right)}\right)^n \quad \text{für} \quad \left|\frac{z-p}{-i\left(1+\frac{p}{i}\right)}\right| < 1$$

$$= \frac{1}{1+\frac{p}{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-i)^n\left(1+\frac{p}{i}\right)^n} (z-p)^n \quad \text{für} \quad |z-p| < \left|-i\left(1+\frac{p}{i}\right)\right|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{\left(1+\frac{p}{i}\right)^{n+1}} (z-p)^n \quad \text{für} \quad |z-p| < |-i-p|$$

d.h. der Konvergenzradius dieser Reihe ist $|-i-p|$.

- Insgesamt erhalten wir nun die Entwicklung

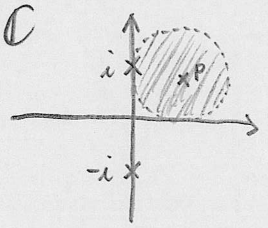
$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\left(1-\frac{p}{i}\right)^{n+1}}(z-p)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{\left(1+\frac{p}{i}\right)^{n+1}}(z-p)^n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{(-i)^n}{\left(1-\frac{p}{i}\right)^{n+1}} + \frac{(i)^n}{\left(1+\frac{p}{i}\right)^{n+1}} \right)(z-p)^n$$

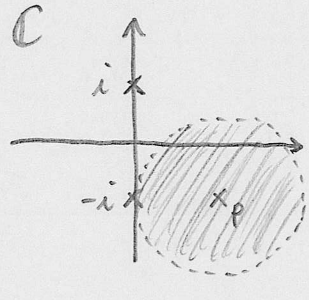
und der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist

$$R = \min\{|i-p|, |-i-p|\}$$

- Beobachtung: Der Konvergenzradius ist gerade so groß, dass der Konvergenzkreis an den am nächsten zum Entwicklungspunkt p gelegenen, singulären Punkt von f (d.h. i oder $-i$) heranreicht:



oder auch



■

<u>Bemerkung:</u>
Entwickelt man die <u>reelle</u> Funktion $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$, welche auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, im Nullpunkt in eine Potenzreihe, so besitzt diese den Konvergenzradius 1. Im reellen kann man nicht erklären, warum der Radius nicht größer ist. Erst durch die Betrachtung in $\mathbb{C}$ wird klar: Der Konvergenzkreis stößt an die „singulären Stellen" i und $-i$, die man aber im reellen nicht sehen kann!