

Funktionentheorie I, SoSe 2013 - Lösung Blatt 4

4.1. (i) (a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Wir verwenden das Quotientenkriterium. Für alle $n \geq 0$ ist:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \frac{(n!)^2 (2(n+1))!}{(2n)! ((n+1)!)^2} = \frac{(n!)^2 (2n+2)!}{(2n)! (n! (n+1))^2} \\ &= \frac{(n!)^2 (2n)! (2n+1)(2n+2)}{(2n)! (n!)^2 (n+1)^2} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{4n^2 + 6n + 2}{n^2 + 2n + 1} = \frac{4 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Potenzreihe besitzt den Konvergenzradius $R=4$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n = \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{n^2}$

Wir verwenden den Satz von Cauchy-Hadamard:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n|} &= \sqrt[n]{\left| \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{n^2} \right|} = \sqrt[n]{\left| \left(1 - \frac{s}{n}\right)^n \right|^n} \\ &= \left| \left(1 - \frac{s}{n}\right)^n \right| \end{aligned}$$

Nach Analysis I ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{s}{n}\right)^n = \exp(-s) > 0$, also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \exp(-s) \xRightarrow{\text{insb.}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \exp(-s).$$

$\Rightarrow$ Die Potenzreihe besitzt den Konvergenzradius $R = \frac{1}{\exp(-s)} = \exp(s)$.

(ii) Für $n \geq 1$ berechnen wir:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n!}\right|} = \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}$$

• Wir betrachten $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Nach Vorlesung besitzt die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ den Konvergenzradius ∞ . Nach Cauchy-Hadamard gilt also

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \underset{\text{C.H.}}{=} 0$$

Da außerdem

$$0 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}}_{\geq 0} \geq 0$$

und damit

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$$

gilt, folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

(alternativ kann man dies auch mit der Abschätzung $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}$ zeigen).

• Die Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ferner beschränkt, denn offenbar ist stets $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$ (Beschränktheit nach unten) und da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nach Voraussetzung den Konvergenz-

radius $R > 0$ besitzt, gilt nach Cauchy-Hadamard:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty) \quad \text{da } R \in (0, \infty]$$

Also muss die Folge auch nach oben beschränkt sein (beispielsweise durch $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$).

• Damit folgt für das Produkt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \right)}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{|a_n|}}_{\text{beschränkt}} = 0$$

$$\stackrel{\text{insb.}}{\Rightarrow} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a_n}{n!} \right|} = 0$$

Nach Cauchy-Hadamard besitzt die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \quad \text{folglich den Konvergenzradius } \infty.$$



4.2. Nach dem Cauchy Kriterium für Reihen bedeutet die gleichmäßige Konvergenz auf G :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit: } \left| \sum_{k=m}^n a_k z^k \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N, \quad \forall z \in G.$$

Also gilt speziell für $\varepsilon = 1$ und jeweils $n := m$:

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ mit: } |a_n| \cdot |z|^n = |a_n z^n| < 1 \quad \forall n \geq N, \quad \forall z \in G.$$

↗ Es ist $a_n \neq 0$ für ein $n \geq N$.

Da G unbeschränkt ist, können wir eine Folge $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ konstruieren mit $z_j \in G \quad \forall j \in \mathbb{N}$ und $\lim_{j \rightarrow \infty} |z_j| = \infty$.

Dann folgt:

$$|a_n| \cdot |z_j|^n < 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}, \text{ d.h. } (|a_n| \cdot |z_j|^n)_{j \in \mathbb{N}} \text{ ist beschränkt.}$$

Aber wegen $\lim_{j \rightarrow \infty} |z_j| = \infty$ folgt auch

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \underbrace{(|a_n|}_{>0} \cdot \underbrace{|z_j|^n}_{\rightarrow \infty}) = \infty,$$

d.h. die Folge kann nicht beschränkt sein. ⚡

$\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \geq N$ und damit ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^k$$

ein Polynom.



4.3. (i) Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m \quad \text{mit den Koeffizienten}$$

$$a_m = \begin{cases} 2 & \text{falls } m=1 \\ 1 & \text{falls } m>1 \text{ und } m=n! \text{ f\"ur ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit folgt:

$$\sqrt[m]{|a_m|} = \begin{cases} 2 & \text{falls } m=1 \\ 1 & \text{falls } m>1 \text{ und } m=n! \text{ f\"ur ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

also:

$$\sup \left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \mid k \geq m \right\} = \begin{cases} 2 & \text{falls } m=1 \\ 1 & \text{falls } m>1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup \left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \mid k \geq m \right\} \right) = 1.$$

Nach Cauchy-Hadamard besitzt die vorgelegte Potenzreihe also den Konvergenzradius $\frac{1}{1} = 1$.

(ii) • Wir zeigen zunächst den Hinweis:

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q} \text{ ist } |f(r \exp(2\pi i \alpha))| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty. \quad (*)$$

Dazu:

Wir schreiben $\alpha = \frac{p}{q}$ für $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q > 0$.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq q$:

$$q \mid n! \Rightarrow \frac{n!}{q} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2\pi i \frac{p}{q} n! \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \exp(2\pi i \alpha n!) = 1.$$

Damit berechnen wir für $r \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} |f(r \cdot \exp(2\pi i \alpha))| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} (r \exp(2\pi i \alpha))^{n!} \right| \\ &= \left| \underbrace{\sum_{n=0}^{q-1} (r \exp(2\pi i \alpha))^{n!}}_{=: \mu \in \mathbb{C}} + \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} \underbrace{\exp(2\pi i \alpha n!)}_{=1} \right| \end{aligned}$$

$$= \left| \mu + \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} \right|$$

Für den Nachweis von (*) genügt es also zu zeigen, dass $\sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} \xrightarrow{r \rightarrow 1} \infty$ gilt (beachte: Die Summe ist für $r \in (0, 1)$ stets reell). Dies sehen wir so: Ist $M \in \mathbb{N}$, dann:

$$\sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} > \underbrace{\sum_{n=q}^{M+q} r^{n!}}_{\text{stetig in } r} \xrightarrow{r \rightarrow 1} \sum_{n=q}^{M+q} 1^{n!} = M+q-q+1 > M$$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} > M \quad \forall M \in \mathbb{N} \quad \text{ok.}$$

Also haben wir den Hinweis (*) gezeigt.

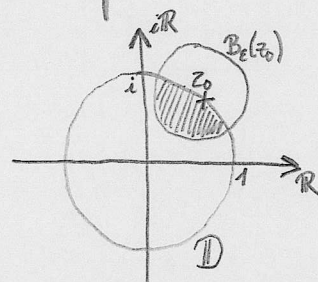
• Damit kommen wir zur Aufgabe:

Sei $z_0 \in \partial \mathbb{D}$, d.h. $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| = 1$.

↗ f ist in z_0 holomorph fortsetzbar.

$\stackrel{\text{Def}}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0$ und $g: \mathcal{B}_\varepsilon(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, mit

$$f|_{\mathcal{B}_\varepsilon(z_0) \cap \mathbb{D}} = g|_{\mathcal{B}_\varepsilon(z_0) \cap \mathbb{D}}$$



Wegen $|z_0| = 1$ gibt es ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit:

$$z_0 = \exp(2\pi i \beta)$$

Da $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $h(\gamma) = \exp(2\pi i \gamma)$ stetig und $\mathcal{B}_\varepsilon(z_0)$ eine offene Umgebung von z_0 ist, ist das Urbild

$$U := h^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(z_0)) \subset \mathbb{R}$$

eine offene Umgebung um $\beta \in \mathbb{R}$. Da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht ist, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{Q} \cap U$, d.h. es gilt:

$$\exp(2\pi i \alpha) \in \mathcal{B}_\varepsilon(z_0)$$

Analog können wir wegen der Stetigkeit von $r \mapsto \exp(2\pi i r)$ ein $\delta > 0$ konstruieren, so dass gilt:

$$\operatorname{rexp}(2\pi i \alpha) \in B_\varepsilon(z_0) \cap \mathbb{D} \quad \forall \quad 1-\delta < r < 1.$$

Für solche r können wir nun wie folgt argumentieren:

$$|g(\operatorname{rexp}(2\pi i \alpha))| = |f(\operatorname{rexp}(2\pi i \alpha))| \xrightarrow{r \rightarrow 1} \infty \quad \text{wg. } (*).$$

Andererseits ist g stetig in $B_\varepsilon(z_0)$ und damit:

$$|g(\operatorname{rexp}(2\pi i \alpha))| \xrightarrow{r \rightarrow 1} |g(\exp(2\pi i \alpha))| \in \mathbb{R} \quad \text{⚡}$$

f ist in z_0 also doch nicht holomorph fortsetzbar. ◻