Funktionentheorie I, SoSe 2013 – Lösung Blatt 5

5.1. (i) Idee: Verwende die nach Vorlesung biholomorphe Cayley-Abbildung

$$c : \mathbb{H} \to \mathbb{D}, \quad z \mapsto \frac{z-i}{z+i}.$$

Nach Vorlesung ist

$$c^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}, \quad z \mapsto i\frac{z+1}{-z+1}.$$

Nun ist

$$\tau : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad z \mapsto 2z$$

offenbar wohldefiniert und holomorph mit der holomorphen Umkehrabbildung

$$\tau^{-1} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad z \mapsto \frac{z}{2}$$

$\Rightarrow$ τ ist biholomorph.

Da $0 \notin \mathbb{H}$ gilt, ist τ ferner fixpunktfrei.

Definiere

$$f := c \circ \tau \circ c^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

$\Rightarrow$ f ist biholomorph als Komposition biholomorpher Abbildungen.

$\nexists$ $p \in \mathbb{D}$ mit $f(p) = p$.

$\Rightarrow \; p = c(\tau(c^{-1}(p))) \;\Rightarrow\; c^{-1}(p) = \tau(c^{-1}(p))$

$\Rightarrow \; c^{-1}(p) \in \mathbb{H}$ ist Fixpunkt von τ $\lightning$

Also muss f doch fixpunktfrei sein. ok.

Konkret ist

$$f(z) = \frac{2i\frac{z+1}{-z+1} - i}{2i\frac{z+1}{-z+1} + i} = \frac{3z+1}{z+3}$$

Bemerkung:

Diese Abbildung zeigt, dass man sehr einfache fixpunktfreie und biholomorphe Abbildungen $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ konstruieren kann. Dies ist bemerkenswert, da die Situation bereits dann viel schlechter wird, wenn man den Rand $\partial\mathbb{D}$ der Kreisscheibe hinzunimmt:

Fixpunktsatz von Brouwer:

Sei $f: \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt.

(einen Beweis findet man in: J.W. Vick, Homology Theory, Springer-Verlag).

Der Fixpunktsatz von Brouwer gilt übrigens für alle abgeschlossenen Einheitskugeln in jedem $\mathbb{R}^n$.

(ii) Wir konstruieren zunächst eine biholomorphe Abbildung $\mathbb{H} \to \mathbb{C}^-$. Dazu definieren wir:

$$\Psi : \mathbb{H} \to \mathbb{C}^-, \quad z \mapsto -z^2.$$

- Ψ ist wohldefiniert, denn ↯ $\Psi(p) \in \mathbb{R}$ mit $\Psi(p) \leq 0$ für ein $p \in \mathbb{H}$. Wegen $-p^2 = \Psi(p) \leq 0$ ist $p^2 \geq 0$ (und reell).

  $\Rightarrow p = \pm\sqrt{p^2} \in \mathbb{R}$ ↯$_{p \in \mathbb{H}}$.

- Offenbar ist Ψ holomorph.
- Seien $p, p' \in \mathbb{H}$ mit $\Psi(p) = \Psi(p')$, d.h. $p^2 = p'^2 =: c \in \mathbb{C}$.

  Da $X^2 - c = 0$ nur zwei Lösungen in $\mathbb{C}$ besitzt und diese sich nur um ein Vorzeichen unterscheiden, ist

  $$p' = \pm p.$$

  Da $p \in \mathbb{H}$ ist, folgt: $\operatorname{Im}(p) > 0$. $\Rightarrow \operatorname{Im}(-p) < 0$, d.h. $-p \notin \mathbb{H}$. Da aber $p' \in \mathbb{H}$ vorausgesetzt wurde, ist

  $$p' = p.$$

  $\Rightarrow \Psi$ ist injektiv.

- Wir behaupten, dass Ψ auch surjektiv und damit bijektiv ist. Sei also $w \in \mathbb{C}^-$.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt

$$-X^2 = w$$

zwei Lösungen in $\mathbb{C}$. Sei $p \in \mathbb{C}$ eine solche.

$\nearrow$ $p \in \mathbb{R} \Rightarrow -w = p^2 \geq 0$ (und reell!)

$\Rightarrow w \leq 0$ (und reell)

$\Rightarrow w \notin \mathbb{C}^-$ ↯

Also folgt: $\operatorname{Im}(p) \neq 0$.

Gilt $\operatorname{Im}(p) > 0$, dann ist $p \in \mathbb{H}$ und $\Psi(p) = -p^2 = w$, d.h. wir haben ein Urbild für w gefunden.

Gilt dagegen $\operatorname{Im}(p) < 0$, dann ist $\operatorname{Im}(-p) > 0$, d.h. $-p \in \mathbb{H}$ und $\Psi(-p) = -(-p)^2 = -p^2 = w$, d.h. auch in diesem Fall haben wir ein Urbild konstruiert.

Insgesamt: Ψ ist surjektiv.

- Da Ψ bijektiv ist, existiert die Abbildung

$$\Psi^{-1} : \mathbb{C}^- \to \mathbb{H}.$$

Wir behaupten, dass Ψ^{-1} holomorph ist.

Sei dazu $p \in \mathbb{C}^-$ beliebig. Wegen

$$\Psi'(z) = -2z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{H} \quad (\text{da } 0 \notin \mathbb{H})$$

ist insbesondere $\Psi'(\Psi^{-1}(p)) \neq 0$.

Nach Vorlesung besitzt also Ψ auf einer Umgebung um $\Psi^{-1}(p)$ eine lokale holomorphe Umkehrfunktion.

Da diese lokal mit Ψ^{-1} übereinstimmen muss, haben wir gezeigt:

$\exists$ offene Umgebung $U(p) \subset \mathbb{C}^-$ um p so dass

$$\Psi^{-1}\big|_{U(p)} : U(p) \to \mathbb{H}$$

holomorph ist.

Wegen $\mathbb{C}^- = \bigcup_{p \in \mathbb{C}^-} U(p)$ ist Ψ^{-1} insgesamt holomorph.

$\Rightarrow \Psi : \mathbb{H} \to \mathbb{C}^-$ ist biholomorph.

Nach Vorlesung ist $c^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto i\frac{z+1}{-z+1}$ biholomorph.

$\Rightarrow g := \Psi \circ c^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^-$ ist biholomorph.

Konkret:

$$g(z) = -\left(i\frac{z+1}{-z+1}\right)^2 = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2.$$

$\blacksquare$

5.2. (i) Mit der Formel von Euler berechnen wir:

$$\exp(x+iy) \overset{\text{Add.thm.}}{=} \exp(x)\cdot\exp(iy) = \exp(x)\big(\cos(y)+i\sin(y)\big). \qquad (*)$$

- Behauptung:

$$\exp(V_{x_0}) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = \exp(x_0) \}.$$

Denn:

„$\subset$": $|\exp(x_0+iy)| \overset{(*)}{=} \underbrace{|\exp(x_0)|}_{\geq 0} \cdot \underbrace{|\cos(y)+i\sin(y)|}_{=1} = \exp(x_0).$

„$\supset$": Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \exp(x_0)$.

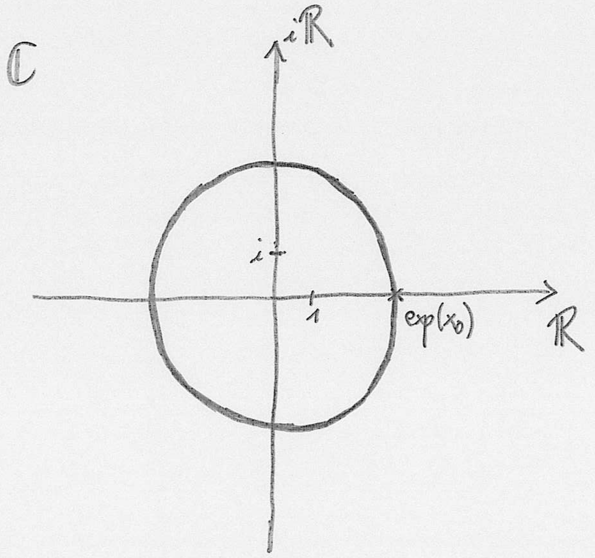
$\Rightarrow$ $z = \exp(x_0)\cdot w$ für $w = \frac{z}{\exp(x_0)} \in \mathbb{C}$.

Wegen $|w| = \left|\frac{z}{\exp(x_0)}\right| = \frac{|z|}{\exp(x_0)} = 1$ ist $w \in S^1$.

$\Rightarrow$ $\exists\, y \in \mathbb{R}$ mit $w = \cos(y) + i\sin(y)$.

$\Rightarrow$ $z = \exp(x_0)\big(\cos(y)+i\sin(y)\big) \overset{(*)}{=} \exp(x_0+iy) \in \exp(V_{x_0})$. ok.

Skizze:



• <u>Behauptung:</u>

$$\exp(H_{y_0}) = \mathbb{R}_+ \cdot (\cos(y_0) + i\sin(y_0)). \quad \text{wobei } \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

<u>Denn:</u>

„$\subset$": $\exp(x+iy_0) \overset{(*)}{=} \underbrace{\exp(x)}_{\in \mathbb{R}_+} (\cos(y_0) + i\sin(y_0))$

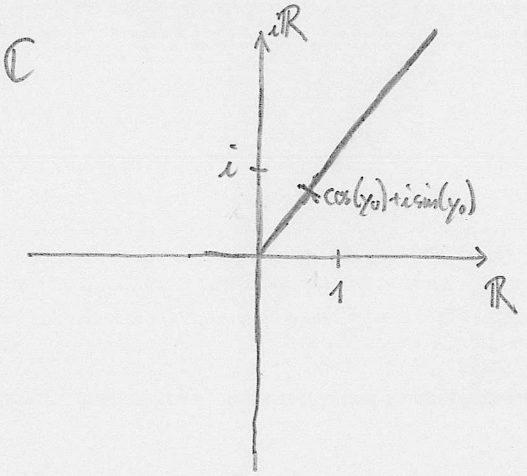
„$\supset$": Ist $z \in \mathbb{R}_+ (\cos(y_0) + i\sin(y_0))$, dann $\exists$ $r \in \mathbb{R}_+$ mit

$$z = r(\cos(y_0) + i\sin(y_0)).$$

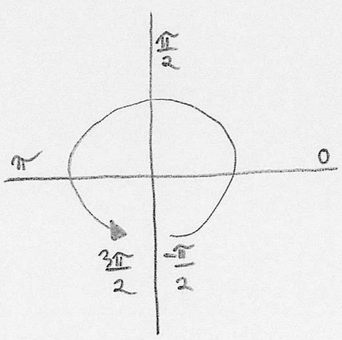
$r \in \mathbb{R}_+ \overset{\text{Analysis I}}{\Longrightarrow} \exists$ $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = r$.

$\Rightarrow z = \exp(x) \cdot (\cos(y_0) + i\sin(y_0)) \overset{(*)}{=} \exp(x+iy_0) \in \exp(H_{y_0})$ ok.

<u>Skizze:</u>



(ii) Wir schreiben wieder $p = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ für $r \in \mathbb{R}_+$ und $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$.



• Ist $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$, dann berechnen wir:

$$|\exp(tp)| = |\exp(tr\cos(\varphi) + itr\sin(\varphi))|$$

$$\overset{(*)}{=} \exp(tr\cos(\varphi)).$$

- Falls $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ist, ist $\cos(\varphi) > 0$, also:

$$|\exp(tp)| = \exp(t\underbrace{r\cos(\varphi)}_{>0}) \xrightarrow{t\to\infty} \infty \qquad \text{(Analysis I)}$$

(unabhängig davon, mit welcher Folge wir in $\mathbb{R}$ gegen ∞ streben).

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \exp(tp) = \infty$$

- Falls $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ ist, ist $\cos(\varphi) < 0$, also:

$$|\exp(tp)| = \exp(t\underbrace{r\cos(\varphi)}_{<0}) \xrightarrow{t\to\infty} 0 \qquad \text{(Analysis I)}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \exp(tp) = 0.$$

- Ist nun $\varphi \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$, dann ist $\cos(\varphi) = 0$.

Damit:

$$\mathrm{Re}(\exp(tp)) = \mathrm{Re}(\exp(itr\sin(\varphi))) \overset{(*)}{=} \cos(tr\sin(\varphi))$$

Wegen $\sin(\varphi) \neq 0$ können wir die Folge

$a_n := \frac{n\pi}{r|\sin(\varphi)|}$ definieren.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{und} \quad \cos(a_n r \sin(\varphi)) \overset{\substack{\text{cos ist achsen-}\\ \text{symmetrisch}}}{=} \cos(n\pi) = (-1)^n$$

(beachte: $\sin(\varphi) \in \{+1, -1\}$)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(\exp(a_n p)) \text{ divergiert}$$

$\Rightarrow$ Der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} \exp(tp)$ existiert nicht.

Insgesamt:

$$\lim_{t\to\infty} \exp(tp) = \begin{cases} \infty & \text{falls } \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{falls } \varphi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \\ \text{existiert nicht} & \text{falls } \varphi \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\} \end{cases}$$

$\blacksquare$

5.3. (i) Sei $\ell: G \to \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion auf G und $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$w: G \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp\left(\frac{1}{n} \cdot \ell(z)\right).$$

$\Rightarrow$ w ist holomorph und wir berechnen:

$$w(z)^n = \exp\left(\frac{1}{n}\ell(z)\right)^n = \exp\left(n \cdot \frac{1}{n}\ell(z)\right) = z \quad \forall z \in G$$

$\Rightarrow$ w ist eine n-te Wurzelfunktion auf G.

(ii) Definiere Hilfsfunktion

$$g: S^1 \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto f(z) - f(-z).$$

$\Rightarrow$ g ist stetig und für alle $z \in S^1$ ist

$$\begin{aligned} g(-z) &= f(-z) - f(z) = -\left(f(z) - f(-z)\right) \\ &= -g(z). \end{aligned} \qquad (*).$$

Falls $g \equiv 0$ gilt, sind wir fertig, denn in diesem Fall ist

$$f(z) = f(-z) \qquad \forall z \in S^1.$$

Sei also $g \not\equiv 0$. $\Rightarrow$ $\exists\, p \in S^1$ mit $g(p) \neq 0$.

Nach $(*)$ ist auch $g(-p) \neq 0$.

Betrachte

$$\gamma: [0, 2\pi) \to S^1, \quad t \mapsto \exp(it).$$

Nach Vorlesung ist γ stetig und surjektiv.

$\Rightarrow \exists\ t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ mit $\gamma(t_1) = p,\ \gamma(t_2) = -p$.

OE gelte $t_1 < t_2$ (sonst: gehe zu $-p$ über).

Also ist $[t_1, t_2] \to \mathbb{R},\ t \mapsto g(\gamma(t))$

stetig mit $g(\gamma(t_1)) = g(p) = -g(-p) = g(\gamma(t_2))$

(Vorzeichen an den Intervallenden sind verschieden!).

$\overset{\text{Zwischenwert-}}{\underset{\text{satz}}{\Longrightarrow}} \exists\ t_0 \in (t_1, t_2)$ mit $g(\gamma(t_0)) = 0$.

Mit $\gamma(t_0) \in S^1$ gibt es also einen Punkt in S^1 mit

$$g(\gamma(t_0)) = 0$$

und damit: $f(\gamma(t_0)) = f(-\gamma(t_0))$ OK.

<u>Bemerkung:</u>

Diese Aussage ist der Satz von Borsuk-Ulam in der Dimension 1. Mit

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$$

gilt ganz Allgemein:

Satz von Borsuk-Ulam:

Ist $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, dann gibt es einen Punkt $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

Der Beweis funktioniert im Fall $n > 1$ aber nicht mehr so elementar und wird heute meist mit Methoden der algebraischen Topologie geführt. (siehe ebenfalls das Buch von Vick).

(iii) • Vorüberlegung: Gelte

$$x + iy = (u + iv)^2 .$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu:

$$\left[\begin{array}{l} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{array}\right.$$

Außerdem folgt:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy| = |(u+iv)^2| = |u+iv|^2 = u^2 + v^2 .$$

Damit:

$$u^2 = \frac{1}{2} \cdot 2u^2 = \frac{1}{2}\left(2u^2 + v^2 - v^2\right) = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + u^2 - v^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 + y^2} + x\right)$$

$$\Rightarrow \quad u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)}$$

Analog berechnen wir:

$$v^2 = \frac{1}{2}\left(2v^2+u^2-u^2\right) = \frac{1}{2}\left(u^2+v^2-\left(u^2-v^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)$$

$$\Rightarrow \quad v = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}$$

Wir haben also gezeigt:

Gilt $x+iy = (u+iv)^2$, dann:

$$u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)} \text{ sowie } v = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)} \qquad (**)$$

(Durch Ausnutzen der Gleichung $y = 2uv$ kann man die Vorzeichen ermitteln:

$$u+iv = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)} + i\,\mathrm{sgn}(y)\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}\right)$$

Damit hat man dann die Menge aller Quadratwurzeln von $x+iy$ berechnet. Für unsere Belange genügt (**).)

- Mit dieser Vorarbeit kommen wir zur Aufgabe.

↗ $w: \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ ist eine 2-te Wurzelfunktion auf $\mathbb{C}^\times$.

Wir schreiben $w = u + iv$. Dann sind die Funktionen

$$u : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad v : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig und wegen (**) gilt $\forall\ x+iy \in \mathbb{C}^\times$:

$$u(x+iy) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)}\ ,\quad v(x+iy) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}\ .$$

Wenden wir (ii) auf die stetige Funktion

$$u\big|_{S^1} : S^1 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{an, dann folgt:}$$

$\exists\ x_0 + iy_0 \in S^1$ mit $u(x_0+iy_0) = u(-x_0-iy_0)$, d.h.

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}+x_0\right)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}-x_0\right)}$$

also

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+x_0)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-x_0)}\ .$$

$\Rightarrow x_0 = 0$ also wegen $x_0+iy_0 \in S^1$: $y_0 \in \{\pm 1\}$.

Wir haben also gezeigt:

$$u(i) = u(-i).$$

Völlig analog ergibt die Anwendung von (ii) auf $v|_{S_1}$:

$$v(i) = v(-i).$$

$\Rightarrow \quad w(i) = w(-i)$ und damit:

$$i = w(i)^2 = w(-i)^2 = -i \qquad \lightning$$

Es gibt also doch keine 2-te Wurzelfunktion auf $\mathbb{C}^\times$. Nach Teil (i) kann es also auf $\mathbb{C}^\times$ keine Logarithmusfunktion geben!

$\blacksquare$

Bemerkung:

- Der Beweis zeigt, dass es auf $\mathbb{C}^\times$ auch keine stetige Quadratwurzelfunktion \ Logarithmusfunktion gibt.
  Insbesondere ist der Ausdruck

$$„\sqrt{z}“$$

  für $z \notin \mathbb{R}_+$ sinnlos!
- Obiger Beweis verwendet keine Analysis – er ist rein topologisch. Mit (komplexer) Integrationstheorie kann die Aussage kürzer (aber weniger elementar) bewiesen werden.