Funktionentheorie I, SoSe 2013 - Lösung Blatt 6

6.1. (i) Für $z \in G$ berechnen wir:

$$\exp(l_1(z) - l_2(z)) = \exp(l_1(z)) \cdot \exp(l_2(z))^{-1}$$

$$\overset{l_1, l_2 \text{ Logarithmen}}{=} z \cdot z^{-1} = 1.$$

Nach Vorlesung gilt

$$\exp(z) = 1 \iff z \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow \forall z \in G \quad \exists \; K(z) \in \mathbb{Z}$ mit

$$l_1(z) - l_2(z) = 2\pi i K(z). \qquad (*)$$

Für die von uns konstruierte Funktion

$$K: G \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$$

gilt also

$$K(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(l_1(z) - l_2(z)\right).$$

$\overset{l_1, l_2}{\underset{\text{holomorph}}{\Longrightarrow}}$ K ist holomorph, also insbesondere stetig.

Um die Behauptung zu zeigen genügt es nun wegen $(*)$ nachzuweisen, dass die Funktion K konstant ist.

Sei dazu $q \in G$ beliebig und $m := K(q) \in \mathbb{Z}$.

Wir betrachten die Menge

$$M := K^{-1}(\{m\}) \subset G.$$

Wegen $K(q)=m$ ist zunächst $q \in M$, d.h.

$$M \neq \emptyset.$$

Ferner ist $\{m\} \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und damit auch M abgeschlossen als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion.

Da

$$B_{\frac{1}{2}}(m) = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-m| < \tfrac{1}{2} \right\} \subset \mathbb{C}$$

offen ist, folgt aus der Stetigkeit von K ferner:

$$K^{-1}\left(B_{\frac{1}{2}}(m)\right) \subset G \quad \text{ist offen.}$$

Wegen $K(G) \subset \mathbb{Z}$ ist nun aber

$$K^{-1}\left(B_{\frac{1}{2}}(m)\right) = K^{-1}\Big(\underbrace{B_{\frac{1}{2}}(m) \cap \mathbb{Z}}_{=\{m\}}\Big) = K^{-1}(\{m\}) = M$$

so dass $M \subset G$ auch offen ist.

Insgesamt ist also $M \subset G$ offen, abgeschlossen und nicht leer. Da G als Gebiet zusammenhängend ist, folgt: $\quad G = M$, d.h. $\quad G = K^{-1}(\{m\})$.

$\Longrightarrow \forall z \in G$ ist $K(z) = m$, d.h. K ist konstant.

ok.

(ii) • Sei $p \in \mathbb{C}^-$ beliebig. Mit der geometrischen Reihe berechnen wir:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{p+z-p} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-p}{p}} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-p}{-p}}$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-p}{-p}\right)^n \quad \text{für } \left|\frac{z-p}{-p}\right| < 1$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^n} (z-p)^n \quad \text{für } |z-p| < |p| .$$

Wir erhalten also die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^{n+1}} (z-p)^n \quad \text{für } |z-p| < |p|$$

von $\frac{1}{z}$ um den Entwicklungspunkt $p \in \mathbb{C}^-$ mit dem Konvergenzradius $|p|$.

• Nach Vorlesung besitzt damit auch die formal integrierte Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^{n+1} \cdot (n+1)} (z-p)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot p^n} (z-p)^n$$

den Konvergenzradius $|p|$, Konvergiert also nach Vorlesung gegen eine holomorphe Funktion

$$f: B_{|p|}(p) \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot p^n} (z-p)^n .$$

Weiter folgt nach Vorlesung für die Ableitung:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot p^n} \cdot n \, (z-p)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^{n+1}} (z-p)^n$$

$$= \frac{1}{z} \qquad \text{auf } B_{|p|}(p)$$

d.h. mit f haben wir auf $B_{|p|}(p)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ konstruiert.

- Wir betrachten nun die Funktion

$$g: B_{|p|}(p) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z \exp(-f(z)).$$

g ist nach Definition holomorph, mit

$$g'(z) = \exp(-f(z)) + z \exp(-f(z)) \cdot (-f'(z))$$

$$= \exp(-f(z)) + z \exp(-f(z)) \cdot \left(-\frac{1}{z}\right)$$

$$= 0 \qquad \forall z \in B_{|p|}(p).$$

Da $B_{|p|}(p)$ zusammenhängend ist, ist g folglich konstant, und wegen

$$g(p) = p \exp(-\underbrace{f(p)}_{=0}) = p$$

erhalten wir: $g(z) = p \quad \forall z \in B_{|p|}(p)$.

Da $p \in \mathbb{C}^-$ vorausgesetzt war, ist $\log(p) \in \mathbb{C}$ wohldefiniert und es folgt:

$$z \exp(-f(z)) = p = \exp(\log(p)) \qquad \forall z \in B_{|p|}(p)$$

$$\Rightarrow \qquad z = \exp(f(z) + \log(p)) \qquad \forall z \in B_{|p|}(p)$$

Also haben wir gezeigt, dass die Potenzreihe

$$\log(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot p^n} (z-p)^n = \log(p) + f$$

mit Konvergenzradius $|p|$ auf $B_{|p|}(p)$ eine Logarithmusfunktion definiert $\overset{!}{\vee}$

- Da $\mathbb{C}^-$ offen und $p \in \mathbb{C}^-$ ist, finden wir eine Zahl

$$0 < R < |p|$$

mit $B_R(p) \subset \mathbb{C}^-$.

Auf $B_R(p)$ haben wir nun mit $\log|_{B_R(p)}$ sowie $(\log(p) + f)|_{B_R(p)}$ zwei Logarithmusfunktionen. Da $B_R(p)$ ein Gebiet ist und

$$\log(p) + \underbrace{f(p)}_{=0} = \log(p)$$

folgt aus (i):

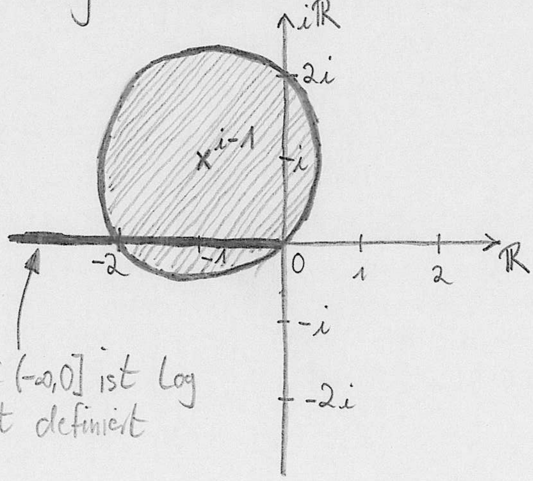
$$\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot p^n} (z-p)^n \quad \forall\ z \in B_R(p).$$

Damit ist die gesuchte Potenzreihenentwicklung des Hauptzweiges des Logarithmus im Punkt $p \in \mathbb{C}^-$ gefunden.

- Wegen $|i-1| = \sqrt{2}$ zeigt obige Rechnung, dass die Potenzreihe der Entwicklung von Log in $i-1$ auf $B_{\sqrt{2}}(i-1)$ Konvergiert. Es ist

$$|-1-(i-1)| = 1 < \sqrt{2} \Rightarrow -1 \in B_{\sqrt{2}}(i-1).$$

Aber: $-1 \notin \mathbb{C}^-$ $\overset{!}{\nabla}$ Wir sehen also, dass die Potenzreihe aus der Entwicklung in Punkten Konvergiert, in denen Log nicht definiert ist. Genauer gilt für den Konvergenzkreis:



Sei $G_1 :=\mathbb{H} \cap B_{\sqrt{2}}(i-1)$ und $G_2 := \overline{\mathbb{H}} \cap B_{\sqrt{2}}(i-1)$. Dann ist G_1 ein Gebiet auf dem mit Log und der Grenzfunktion der Potenzreihenentwicklung zwei Logarithmen existieren, die in $(i-1) \in G_1$ übereinstimmen.

$\overset{(i)}{\Rightarrow}$ Auf G_1 stimmt die Grenzfunktion der Potenzreihe mit log überein.

Untersuchen nun G_2.

↯ Beide Funktionen stimmen auf G_2 überein.

$\Rightarrow$ Mit $l : \mathbb{C}^- \cup (-2,0) \to \mathbb{C}$,

$$l(z) := \begin{cases} \log(z) & \text{falls } z \in \mathbb{C}^- \\ \log(i-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(i-1)^n} (z-(i-1))^n & \text{falls } z \in (-2,0) \end{cases}$$

erhalten wir dann eine (holomorphe $\overset{?}{!}$) Logarithmusfunktion auf dem Gebiet $G := \mathbb{C}^- \cup (-2,0)$.

$\overset{5.3(i)}{\Rightarrow}$ Auf G existiert eine 2-te Wurzelfunktion w.

Nun ist aber $S^1 \subset G$ und damit erhalten wir wörtlich wie im Beweis von 5.3 (iii) den Widerspruch $w(i) = w(-i)$. ↯

$\Rightarrow$ Auf G_2 stimmen die Grenzfunktion der Potenzreihe und log nicht überein!

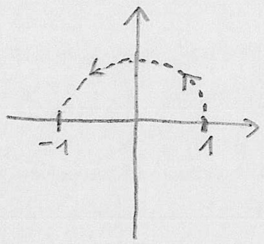
Genauer erhalten wir aus (i) da die Grenzfunktion auf dem Gebiet G_2 eine Logarithmusfunktion ist:

$$\exists\, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \log(z) = 2\pi i k + \log(i-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(i-1)^n} (z-(i-1))^n$$

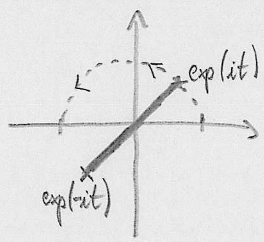
für alle $z \in G_2$. ∎

(Bemerkung: Man kann zeigen, dass $k=1$ gilt...)

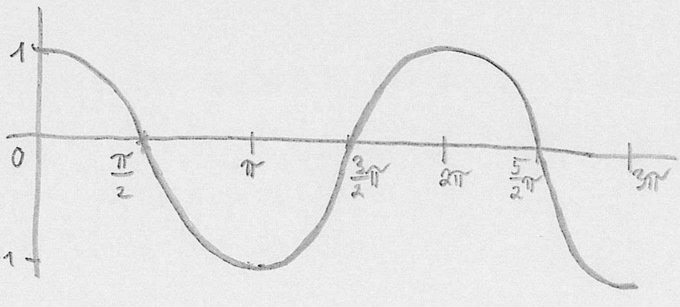
6.2. (i) Zunächst durchläuft $\exp(it)$ für $t \in [0, \pi]$ die Einheitskreislinie $S^1 \subset \mathbb{C}$ in positiver Drehrichtung von $+1$ bis -1 (Halbkreis):



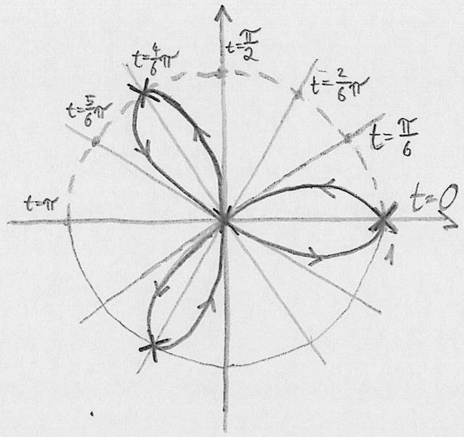
In jedem Punkt t wird dann der Radius durch die reelle Zahl $\cos(3t) \in [-1, 1]$ bestimmt, d.h. zu einem Zeitpunkt $t \in [0, \pi]$ befindet die Kurve sich (abhängig von $\cos(3t)$) irgendwo auf der Strecke zwischen $\exp(it)$ und $\exp(-it)$:



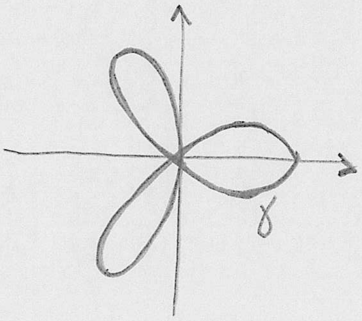
Der Cosinus hat zwischen 0 und 3π den folgenden Graphen:



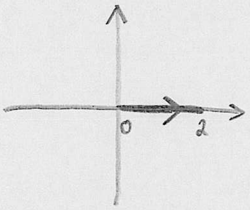
Folglich durchläuft die Kurve folgende Punkte:



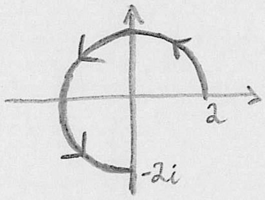
Es ergibt sich also ein dreiblättriges Kleeblatt:



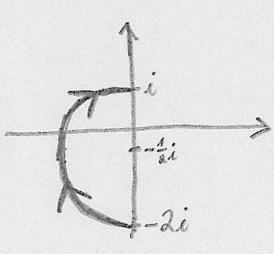
(ii) Wir zerlegen die Kurve in vier Teilkurven:



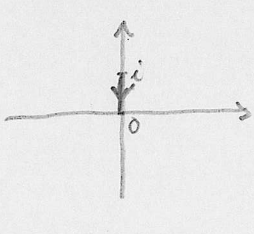
$$\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto 2t$$



$$\gamma_2 : [1,2] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto 2\exp\left(i\,\frac{3\pi(t-1)}{2}\right)$$



$$\gamma_3 : [2,4] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto -\frac{1}{2}i + \frac{3}{2}\exp\left(-i\left(\frac{t-1}{2}\right)\pi\right)$$



$$\gamma_4 : [4,5] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto i(5-t)$$

Insgesamt erhalten wir die Parametrisierung:

$$[0,5] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto \begin{cases} 2t & \text{falls } 0 \leq t < 1 \\ 2\exp\left(i\frac{3\pi(t-1)}{2}\right) & \text{falls } 1 \leq t < 2 \\ -\frac{1}{2}i + \frac{3}{2}\exp\left(-i\left(\frac{t-1}{2}\right)\pi\right) & \text{falls } 2 \leq t < 4 \\ i\cdot(5-t) & \text{falls } 4 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

$\blacksquare$

6.3. • Wir parametrisieren die Wege:

$$\gamma_1 : [1,3] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \exp\left(i\frac{t\pi}{2}\right)$$

$$\gamma_2 : [-1,1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \exp\left(-i\frac{t\pi}{2}\right)$$

• Damit berechnen wir wegen $\gamma_1'(t) = \frac{i\pi}{2}\exp\left(i\frac{t\pi}{2}\right) = \frac{i\pi}{2}\gamma_1(t)$:

$$\int_{\gamma_1} z\,dz = \int_1^3 \gamma_1(t)\gamma_1'(t)\,dt = \frac{i\pi}{2}\int_1^3 \gamma_1(t)^2\,dt$$

$$= \frac{i\pi}{2}\int_1^3 \exp\left(i\frac{t\pi}{2}\right)^2 dt = \frac{i\pi}{2}\int_1^3 \exp(it\pi)\,dt$$

$$= \frac{i\pi}{2}\left(\frac{1}{i\pi}\exp(it\pi)\Big|_1^3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\exp(3i\pi) - \exp(i\pi)\right) = \frac{1}{2}\left(-1-(-1)\right)$$

$$= 0.$$

$$\int_{\gamma_1} \overline{z}\,dz = \int_1^3 \overline{\gamma_1(t)}\,\gamma_1'(t)\,dt = \frac{i\pi}{2}\int_1^3 \overline{\gamma_1(t)}\,\gamma_1(t)\,dt$$

$$= \frac{i\pi}{2}\int_1^3 \underbrace{\left|\exp\left(i\frac{t\pi}{2}\right)\right|^2}_{=1} dt = \frac{i\pi}{2}\int_1^3 1\,dt$$

$$= i\pi.$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \mathrm{Im}(z)\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{2i}(z-\overline{z})\,dz = \frac{1}{2i}\left(\int_{\gamma_1} z\,dz - \int_{\gamma_1}\overline{z}\,dz\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(0 - i\pi\right) = -\frac{\pi}{2}$$

- Analog berechnen wir mit $\gamma_2'(t) = -\frac{i\pi}{2}\gamma_2(t)$:

$$\int_{\gamma_2} z\,dz = \int_{-1}^{1} \gamma_2(t)\gamma_2'(t)\,dt = -\frac{i\pi}{2}\int_{-1}^{1}\gamma_2(t)^2\,dt$$

$$= -\frac{i\pi}{2}\int_{-1}^{1}\exp\left(-i\frac{t\pi}{2}\right)^2 dt = -\frac{i\pi}{2}\int_{-1}^{1}\exp(-it\pi)\,dt$$

$$= -\frac{i\pi}{2}\left(\frac{-1}{i\pi}\exp(-it\pi)\Big|_{-1}^{1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\exp(-i\pi) - \exp(i\pi)\right) = \frac{1}{2}\left(-1-(-1)\right)$$

$$= 0$$

$$\int_{\gamma_2}\overline{z}\,dz = \int_{-1}^{1}\overline{\gamma_2(t)}\,\gamma_2'(t)\,dt = -\frac{i\pi}{2}\int_{-1}^{1}\overline{\gamma_2(t)}\,\gamma_2(t)\,dt$$

$$= -\frac{i\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left|\exp\left(-i\frac{t\pi}{2}\right)\right|^2 dt = -\frac{i\pi}{2}\int_{-1}^{1} 1\,dt = -i\pi.$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2}\operatorname{Im}(z)\,dz = \int_{\gamma_2}\frac{1}{2i}(z-\overline{z})\,dz = \frac{1}{2i}\left(\int_{\gamma_2} z\,dz - \int_{\gamma_2}\overline{z}\,dz\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(0 + i\pi\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$\blacksquare$