Funktionentheorie I, SoSe 2013 – Lösung Blatt 7

7.1. (i) • Wir definieren den zusammengesetzten Weg durch

$$\gamma_1+\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{falls } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Da γ_1 und γ_2 als Wege stückweise stetig differenzierbar sind, ist auch $\gamma_1+\gamma_2$ stückweise stetig differenzierbar, denn an der einzigen problematischen Stelle $t=\frac{1}{2}$ ist $\gamma_1+\gamma_2$ stetig, da nach Voraussetzung $\gamma_1(1)=\gamma_2(0)$ gilt. Also ist $\gamma_1+\gamma_2$ ein Weg.

• Seien nun Partitionen $0=t_0<t_1<\dots<t_k=1$ sowie $0=s_0<s_1<\dots<s_\ell=1$ von $[0,1]$ gegeben, so dass gilt:

$$\gamma_1\big|_{[t_i,t_{i+1}]} \quad \text{ist für } i\in\{0,\dots,k-1\} \text{ stetig differenzierbar}$$

$$\gamma_2\big|_{[s_i,s_{i+1}]} \quad \text{ist für } i\in\{0,\dots,\ell-1\} \text{ stetig differenzierbar.}$$

Dann ist

$$0=\frac{t_0}{2}<\frac{t_1}{2}<\dots<\frac{t_k}{2}=\frac{s_0+1}{2}<\frac{s_1+1}{2}<\dots<\frac{s_\ell+1}{2}=1$$

eine Partition von $[0,1]$ und es ist jeweils:

- $\forall t \in \left[\frac{t_i}{2}, \frac{t_{i+1}}{2}\right]$: $\gamma_1 + \gamma_2(t) = \gamma_1(\underset{\in [t_i, t_{i+1}]}{2t})$

$\Rightarrow \gamma_1 + \gamma_2 \Big|_{\left[\frac{t_i}{2}, \frac{t_{i+1}}{2}\right]}$ ist stetig differenzierbar.

- $\forall t \in \left[\frac{s_i + 1}{2}, \frac{s_{i+1}+1}{2}\right]$: $\gamma_1 + \gamma_2(t) = \gamma_2(\underset{\in [s_i, s_{i+1}]}{2t - 1})$

$\Rightarrow \gamma_1 + \gamma_2 \Big|_{\left[\frac{s_i+1}{2}, \frac{s_{i+1}+1}{2}\right]}$ ist stetig differenzierbar.

- Damit berechnen wir:

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{K} \int_{\frac{t_{i-1}}{2}}^{\frac{t_i}{2}} f(\gamma_1 + \gamma_2(t))\,(\gamma_1 + \gamma_2)'(t)\,dt$$

$$+ \sum_{i=1}^{\ell} \int_{\frac{s_{i-1}+1}{2}}^{\frac{s_i+1}{2}} f(\gamma_1 + \gamma_2(t))\,(\gamma_1 + \gamma_2)'(t)\,dt$$

$$\overset{\text{s.o.}}{=} \sum_{i=1}^{K} \int_{\frac{t_{i-1}}{2}}^{\frac{t_i}{2}} f(\gamma_1(2t)) \cdot 2 \cdot \gamma_1'(2t)\,dt$$

$$+ \sum_{i=1}^{\ell} \int_{\frac{s_{i-1}+1}{2}}^{\frac{s_i+1}{2}} f(\gamma_2(2t-1)) \cdot 2\gamma_2'(2t-1)\,dt$$

$$\overset{\text{Substitution}}{=} \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma_1(s)) \cdot \gamma_1'(s)\, ds + \sum_{i=1}^{l} \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(\gamma_2(s)) \cdot \gamma_2'(s)\, ds$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$

(ii) • Wir definieren den umgekehrt durchlaufenen Weg durch:

$$-\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \longmapsto \gamma(a+b-t)$$

$\Rightarrow$ Da γ als Weg stückweise stetig differenzierbar ist, ist offenbar auch $-\gamma$ stückweise stetig differenzierbar und damit ein Weg.

• Sei nun $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ eine Partition von $[a,b]$, so dass gilt:

$$\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \text{ ist stetig differenzierbar für } i \in \{0, \dots, k-1\}.$$

Dann ist offenbar auch

$$a = (a+b-t_k) < (a+b-t_{k-1}) < \dots < (a+b-t_0) = b$$

eine Partition von $[a,b]$ und es ist für t aus $[a+b-t_i, a+b-t_{i-1}]$:

$$-\gamma(t) = \gamma(a+b-t), \quad a+b-t \in [t_{i-1}, t_i]$$

$\Rightarrow \quad -\gamma|_{[a+b-t_i,\, a+b-t_{i-1}]}$ ist stetig differenzierbar.

- Wir berechnen nun:

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{K} \int_{a+b-t_i}^{a+b-t_{i-1}} f(-\gamma(t)) \cdot (-\gamma)'(t)\,dt$$

$$= \sum_{i=1}^{K} \int_{a+b-t_i}^{a+b-t_{i-1}} f(\gamma(a+b-t)) \cdot (-1) \cdot \gamma'(a+b-t)\,dt$$

$$\overset{\text{Substitution}}{=} \sum_{i=1}^{K} \int_{t_i}^{t_{i-1}} f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds$$

$$\overset{\text{Analysis I}}{=} -\sum_{i=1}^{K} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds$$

$$= -\int_{\gamma} f(z)\,dz.$$

(iii) • Wir zeigen vorab, dass die gegebene Funktion

$$g: [c,d] \longrightarrow [a,b]$$

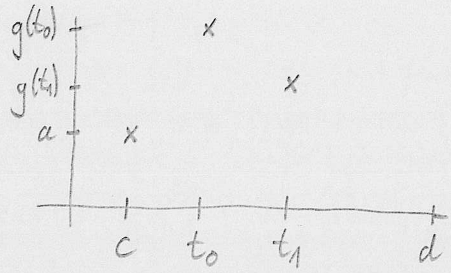
streng monoton wächst. $(*)$

$\lightning$ g wächst nicht monoton (ohne „streng“!)

$\Rightarrow \exists\, t_0, t_1 \in [c,d]$ mit $t_0 < t_1$ und $g(t_0) > g(t_1)$.

Wegen $g(c)=a<b=g(d)$ folgt: $t_0 \neq c$ oder $t_1 \neq d$

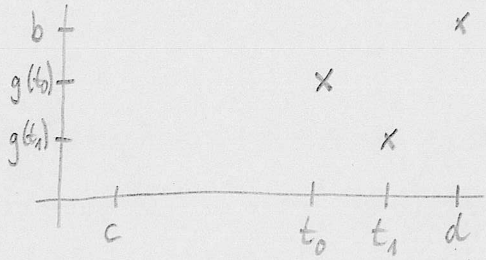
- Falls $t_0 \neq c$ gilt, ist auch $t_1 \neq c$ und wir haben wegen der Bijektivität von g:



$$g(c)=a<g(t_1)<g(t_0)$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $t \in (c, t_0)$ mit $g(t)=g(t_1)$ ↯ g bijektiv

- Falls $t_1 \neq d$ gilt, ist auch $t_0 \neq d$ und wir haben wegen der Bijektivität von g:



$$g(t_1)<g(t_0)<b=g(d)$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $t \in (t_1, d)$ mit $g(t)=g(t_0)$ ↯ g bijektiv.

Da wir in jedem Fall einen Widerspruch erhalten, ist g monoton. Wegen der Bijektivität von g kann aber für $t_0<t_1$ nicht $g(t_0)<g(t_1)$ gelten. Also folgt

$$\forall\, t_0, t_1 \in [c,d] \text{ mit } t_0<t_1 \text{ gilt: } g(t_0)<g(t_1)$$

d.h. $(*)$ ist gezeigt.

- Mit dieser Vorarbeit kommen wir zur Aufgabe.

Da γ als Weg stückweise stetig differenzierbar ist und g als stetig differenzierbar vorausgesetzt wurde, ist auch $\gamma \circ g$ stückweise stetig differenzierbar, d.h. ein Weg.

Sei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ eine Partition von $[a,b]$ so dass $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ für $i \in \{0, \dots, k-1\}$ stetig differenzierbar ist. Wir definieren

$$s_i := g^{-1}(t_i) \in [c,d] \qquad \text{für } i \in \{0, \dots, k\}$$

(wohldefiniert, da g bijektiv). Dann gilt stets

$$s_i < s_{i+1} \qquad \forall i \in \{0, \dots, k\}$$

$\left(\nearrow \; s_i \geq s_{i+1} \overset{(*)}{\Longrightarrow} t_i = g(s_i) \geq g(s_{i+1}) = t_{i+1} \; \lightning \right)$. Also ist

$$c = s_0 < s_1 < \dots < s_k = d$$

eine Partition von $[c,d]$ und da wegen $(*)$

$$g([s_i, s_{i+1}]) \subset [t_i, t_{i+1}] \qquad \forall i \in \{0, \dots, k-1\}$$

gilt, ist $\gamma \circ g|_{[s_i, s_{i+1}]}$ für $i \in \{0, \dots, k-1\}$ stetig differenzierbar

Wir berechnen nun:

$$\int_{\gamma\circ g} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{K} \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(\gamma(g(t)))\,(\gamma\circ g)'(t)\,dt$$

$$= \sum_{i=1}^{K} \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(\gamma(g(t)))\cdot \gamma'(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

Substitution

$$= \sum_{i=1}^{K} \int_{g(s_{i-1})}^{g(s_i)} f(\gamma(s))\cdot \gamma'(s)\,ds$$

$$= \sum_{i=1}^{K} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds$$

$$= \int_{\gamma} f(z)\,dz.$$

$\blacksquare$

7.2. Um bequem argumentieren zu können legen wir uns vorab einige topologische Argumente zurecht:

(a) Ist $M \subset \mathbb{C}$ nicht leer, dann ist die Abbildung

$$d(\cdot, M): \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto d(z,M) := \inf\{|z-p| \mid p \in M\}$$

stetig.

Denn: Seien $z, w \in \mathbb{C}$ beliebig.

Dann gilt $\forall q \in M$:

$$d(w,M) = \inf\{|w-p| \mid p \in M\} \leq |w-q| = |w-z+z-q|$$
$$\leq |w-z| + |z-q|$$

Da diese Ungleichung für alle $q \in M$ gilt, bleibt sie erhalten, wenn wir zum Infimum übergehen, d.h. es gilt:

$$d(w,M) - |w-z| \leq \inf\{|z-q| \mid q \in M\} = d(z,M)$$

$$\Rightarrow d(w,M) - d(z,M) \leq |w-z| \qquad \forall w,z \in \mathbb{C}$$

Indem wir w und z vertauschen folgt:

$$d(z,M) - d(w,M) \leq |z-w| = |w-z| \quad \forall w,z \in \mathbb{C}.$$

Also folgt insgesamt:

$$|d(w,M) - d(z,M)| \leq |z-w|. \qquad \forall z,w \in \mathbb{C}.$$

Damit folgt die behauptete Stetigkeit aus dem ε-δ-Kriterium für jeweils $\delta := \varepsilon$.

ok.

(b) Ist $M \subset \mathbb{C}$ nicht leer und $\varepsilon > 0$, dann definieren wir:

$$M_\varepsilon := \{ z \in \mathbb{C} \mid d(z, M) < \varepsilon \}$$

Es ist stets $M_\varepsilon \subset \mathbb{C}$ offen mit $M \subset M_\varepsilon$.

Denn: Da für $q \in M$ nach Konstruktion $d(q, M) = 0 < \varepsilon$ gilt, ist $M \subset M_\varepsilon$ klar. Außerdem ist

$$M_\varepsilon = d(\cdot, M)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$$

offen, da $d(\cdot, M)$ nach (a) stetig ist. ok.

(c) Ist $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und nicht leer und ist $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$K \text{ konvex} \implies K_\varepsilon \text{ konvex.}$$

Denn: • Sei $z \in \mathbb{C}$. Da $p \mapsto |z-p|$ stetig und K kompakt ist, existiert ein $z' \in K$ mit

$$|z - z'| = \inf \{ |z-p| \mid p \in K \} = d(z, K).$$

Also haben wir gezeigt:

$$\forall z \in \mathbb{C} \ \exists z' \in K \text{ mit } d(z, K) = |z - z'| \quad (*).$$

• Seien nun $z, w \in K_\varepsilon$ und $t \in [0,1]$. Zu zeigen:

$$tz + (1-t)w \in K_\varepsilon.$$

Gemäß (*) existieren nun $z', w' \in K$ mit

$$|z-z'| = d(z,K) \overset{z\in K_\varepsilon}{<} \varepsilon \quad \text{und}$$

$$|w-w'| = d(w,K) \overset{w\in K_\varepsilon}{<} \varepsilon .$$

Da K konvex ist, ist

$$tz' + (1-t)w' \in K$$

und wir berechnen:

$$\left|(tz+(1-t)w) - (tz'+(1-t)w')\right| = \left|t(z-z') + (1-t)(w-w')\right|$$

$$\leq t \underbrace{|z-z'|}_{<\varepsilon} + (1-t)\underbrace{|w-w'|}_{<\varepsilon} < t\cdot\varepsilon + (1-t)\cdot\varepsilon = \varepsilon.$$

Also ist

$$d(tz+(1-t)w, K) = \inf\{|(tz+(1-t)w)-p| \mid p \in K\}$$

$$\leq \left|(tz+(1-t)w) - (tz'+(1-t)w')\right| < \varepsilon$$

und damit $tz + (1-t)w \in K_\varepsilon$, wie gewünscht.

$\Longrightarrow K_\varepsilon$ ist konvex.

ok.

(d) Ist $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und nicht leer und gilt $K \subset D$ für eine offene Menge $D \subset \mathbb{C}$, dann folgt:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ mit: } K \subset K_\varepsilon \subset D.$$

Denn: • Wegen $D \subset \mathbb{C}$ offen ist $D^c \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und da $K \subset D$ gilt, ist $K \cap D^c = \emptyset$. Es sei

$$d(K, D^c) := \inf \{ |z-w| \mid z \in K, w \in D^c \}.$$

Wir zeigen nun, dass $d(K, D^c) > 0$ gilt.
Da K Kompakt ist, existiert nach (a) ein $p \in K$ mit

$$d(p, D^c) = \inf \{ d(z, D^c) \mid z \in K \}$$

(Satz vom Maximum und Minimum, angewandt auf $d(\cdot, D^c)$).
Nun gilt $\forall$ $q \in K$ und $a \in D^c$:

$$\inf \{ \underbrace{d(z, D^c)}_{\leq |z-a|} \mid z \in K \} \leq \inf \{ |z-a| \mid z \in K \} \leq |q-a|$$

und damit können wir zum Infimum über diese q und a übergehen:

$$d(p, D^c) = \inf \{ d(z, D^c) \mid z \in K \} \leq \inf \{ |q-a| \mid q \in K, a \in D^c \}$$
$$= d(K, D^c).$$

Es genügt also $d(p, D^c) > 0$ zu zeigen, um $d(K, D^c) > 0$ zu erhalten. Zunächst ist offenbar $d(p, D^c) \geq 0$.
$\lightning$ $d(p, D^c) = 0$. $\Rightarrow$ $\exists$ Folge $p_n \in D^c$ mit

$$\lim_{n \to \infty} |p - p_n| = 0$$

$\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow}$ $\lim_{n \to \infty} p_n = p$. Da aber D^c abgeschlossen ist, folgt hieraus: $p \in D^c$. Mithin ist $p \in K \cap D^c$ $\lightning_{K \cap D^c = \emptyset}$.

Wir haben also gezeigt: $d(K, D^c) > 0$.

- Definiere nun $\varepsilon := \dfrac{d(K,D^c)}{2} > 0$. Behauptung:

$$K \subset K_\varepsilon \subset D.$$

Sei also $q \in K_\varepsilon$ gegeben. $\Rightarrow d(q,K) < \dfrac{d(K,D^c)}{2}$.

$\nearrow$ $q \in D^c$. Dann folgt

$$d(K,D^c) = \inf\{|z-w| \mid z \in K, w \in D^c\} \leq \inf\{|z-q| \mid z \in K\}$$

$$= d(q,K).$$

Folglich:

$$d(K,D^c) \leq d(q,K) < \frac{d(K,D^c)}{2} \qquad \lightning$$

Es gilt also doch $q \in D$ und folglich

$$K_\varepsilon \subset D.$$

Damit ist (d) vollständig gezeigt. ok.

(e) Ist $S \subset \mathbb{C}$ sternförmig mit Zentrum $p \in S$ und $K \subset \mathbb{C}$ eine konvexe Menge mit $p \in K$, dann folgt:

$S \cap K$ ist sternförmig (mit Zentrum p).

<u>Denn:</u> Ist $z \in S \cap K$ beliebig.

Da K Konvex mit $z, p \in K$ ist, ist $[z,p] \subset K$.

Da S sternförmig mit Zentrum p ist und $z \in S$ gilt, ist auch $[z,p] \subset S$.

$\Rightarrow [z,p] \subset S \cap K \Rightarrow S \cap K$ sternförmig. ok.

<u>Bemerkung:</u> Diese topologische Vorarbeit wird in der Bewertung <u>nicht</u> verlangt. Sie stellt lediglich Resultate bereit, die intuitiv Klar sind!

Wir Kommen nun zur Aufgabe:

- Nach Voraussetzung ist $p \in \underbrace{\overset{\circ}{B} \cap \overset{\circ}{\Delta}}_{\subset \mathbb{C} \text{ offen}}$.

$\Rightarrow \exists R > 0$ mit $B_R(p) \subset \overset{\circ}{B} \cap \overset{\circ}{\Delta}$.

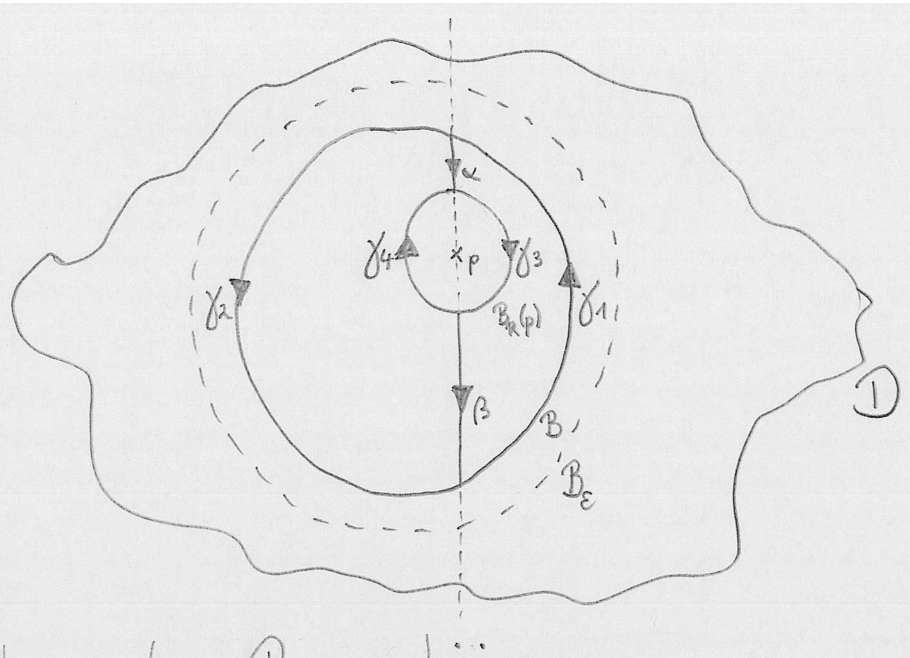
- Wir behaupten: $\int_{\partial B} f(z)dz = \int_{\partial B_R(p)} f(z)dz$. Dazu:

Da B Kompakt ist, existiert nach (d) ein $\varepsilon > 0$ mit

$$B \subset B_\varepsilon \subset D.$$

Da B Konvex ist, ist nach (c) auch B_ε Konvex.

Indem wir mit der Geraden $p + i\mathbb{R}$ „schneiden", Können wir Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \alpha, \beta$ wie folgt wählen:



Wir haben also Parametrisierungen

$$\partial B = \gamma_1 + \gamma_2 \quad \text{und} \quad \partial B_R(p) = -(\gamma_3 + \gamma_4).$$

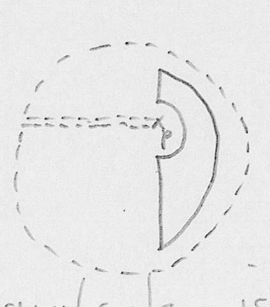
Nun verläuft der geschlossene Weg

$$\gamma_1 + \alpha + \gamma_3 + \beta$$

ganz im Gebiet $B_\varepsilon \cap (\mathbb{C} \setminus \{p + \mathbb{R}_{\leq 0}\}) \subset D \setminus \{p\}$, auf welchem f holomorph ist. Da

$$\mathbb{C} \setminus \{p + \mathbb{R}_{\leq 0}\}$$

sternförmig mit Zentrum $p + \frac{R}{2}$ und B_ε konvex ist, ist $B_\varepsilon \cap (\mathbb{C} \setminus \{p + \mathbb{R}_{\leq 0}\})$ sternförmig nach (e):



Der Cauchy-Integralsatz ist also anwendbar und

Liefert:

$$\int_{\gamma_1+\alpha+\gamma_3+\beta} f(z)\,dz = 0.$$

Völlig analog ist auch $\int_{\gamma_2-\beta+\gamma_4-\alpha} f(z)\,dz = 0$ so dass

wir berechnen:

$$0 = \int_{\gamma_1+\alpha+\gamma_3+\beta} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2-\beta+\gamma_4-\alpha} f(z)\,dz$$

$$\overset{7.1.}{=} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\alpha} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\beta} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$$- \int_{\beta} f(z)\,dz + \int_{\gamma_4} f(z)\,dz - \int_{\alpha} f(z)\,dz.$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3+\gamma_4} f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial B} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = -\int_{\gamma_3+\gamma_4} f(z)\,dz = \int_{-(\gamma_3+\gamma_4)} f(z)\,dz$$

$$= \int_{\partial B_R(p)} f(z)\,dz.$$

- Nun zeigen wir

$$\int_{\partial B_R(p)} f(z)\,dz = \int_{\partial \Delta} f(z)\,dz$$

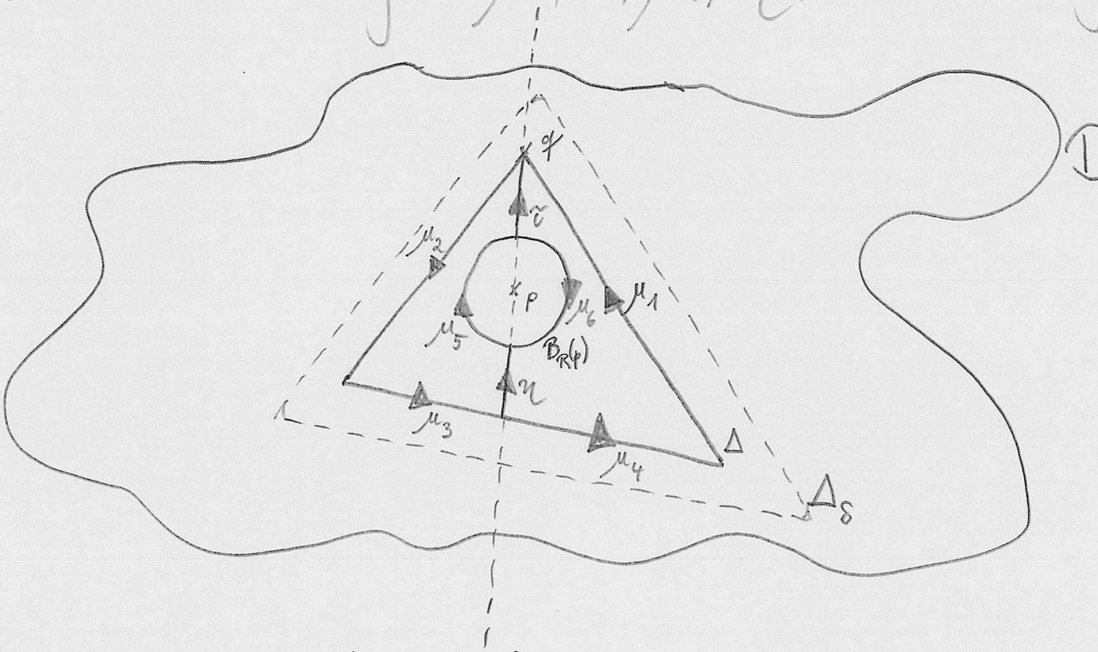
womit dann die Behauptung nachgewiesen ist.

Da Δ Kompakt ist, existiert nach (d) ein $\delta > 0$ mit

$$\Delta \subset \Delta_\delta \subset D$$

und da Δ Konvex ist, ist nach (c) auch Δ_δ Konvex.

Sei $q \in \partial\Delta$ ein Eckpunkt des Dreiecks Δ. Analog wie eben „schneiden" wir entlang der Geraden $\mathbb{R}\cdot(q-p)$ und erhalten Wege $\mu_1, \dots, \mu_6, \eta, \tau$ wie folgt:



Dieses Mal haben wir

$$\partial\Delta = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 \quad \text{und} \quad \partial B_R(p) = -(\mu_5 + \mu_6).$$

Nach dieser Konstruktion verlaufen die Wege

$$\mu_1 - \tau + \mu_6 - \eta + \mu_4 \quad \text{und} \quad \mu_2 + \mu_3 + \eta + \mu_5 + \tau$$

aber wieder in sternförmigen Gebieten, die ganz in $D \setminus \{p\}$ enthalten sind, d.h. auf denen f holomorph ist.

Mit dem Cauchy-Integralsatz folgt also:

$$0 = 0 + 0 = \int_{\mu_1 - \tau + \mu_6 - \eta + \mu_4} f(z)\,dz + \int_{\mu_2 + \mu_3 + \eta + \mu_5 + \tau} f(z)\,dz$$

$$= \int_{\mu_1} f(z)\,dz - \int_{\tau} f(z)\,dz + \int_{\mu_6} f(z)\,dz - \int_{\eta} f(z)\,dz + \int_{\mu_4} f(z)\,dz$$

$$+ \int_{\mu_2} f(z)\,dz + \int_{\mu_3} f(z)\,dz + \int_{\eta} f(z)\,dz + \int_{\mu_5} f(z)\,dz + \int_{\tau} f(z)\,dz.$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4} f(z)\,dz = - \int_{\mu_5 + \mu_6} f(z)\,dz$$

$$= \int_{-(\mu_5 + \mu_6)} f(z)\,dz = \int_{\partial B_R(p)} f(z)\,dz.$$

Insgesamt also:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial B_R(p)} f(z)\,dz = \int_{\partial B} f(z)\,dz.$$

$\blacksquare$

<u>7.3.</u> (i) Es ist

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z+1} = f_1(z) \cdot f_2(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$$

mit

$$f_1 : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{z-1}$$

$$f_2 : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{z+1}.$$

$\Rightarrow f_1, f_2$ sind holomorph.

- Es ist $-1 \notin \overline{B_1(1)} \subset \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ so dass mit der Cauchy-Integralformel folgt:

$$\frac{1}{2} = f_2(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(1)} \frac{f_2(z)}{z-1} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(1)} \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{z-1} \, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(1)} \frac{1}{z^2-1} \, dz.$$

$$\Rightarrow \int_{\partial B_1(1)} \frac{1}{z^2-1} \, dz = \pi i$$

- Analog ist $1 \notin \overline{B_1(-1)} \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$ so dass mit der Cauchy-Integralformel folgt:

$$-\frac{1}{2} = f_1(-1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(-1)} \frac{f_1(z)}{z-(-1)} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(-1)} \frac{1}{z^2-1} \, dz.$$

$$\Rightarrow \int_{\partial B_1(-1)} \frac{1}{z^2-1} \, dz = -\pi i.$$

(ii) Wir berechnen:

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)^{2n}\,dt = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2}(\exp(it)+\exp(-it))\right)^{2n} dt$$

$$= \frac{1}{4^n}\int_0^{2\pi} (\exp(it)+\exp(-it))^{2n}\, \underbrace{(-i)\exp(-it)\, i\exp(it)}_{\equiv 1}\, dt$$

$$= \frac{-i}{4^n}\int_0^{2\pi} \left(\gamma(t)+\frac{1}{\gamma(t)}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t)\,dt$$

mit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\quad t \mapsto \exp(it)$. Also folgt:

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)^{2n}\,dt = \frac{-i}{4^n}\int_\gamma \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{z}\,dz$$

$$= \frac{-i}{4^n}\int_{\partial\mathbb{D}} \left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-k}\right) \cdot \frac{1}{z}\,dz$$

$$= \frac{-i}{4^n}\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_{\partial\mathbb{D}} z^{k-(2n-k)-1}\,dz$$

$$= \frac{-i}{4^n}\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_{\partial\mathbb{D}} z^{2(k-n)-1}\,dz\,.$$

Nun ist $2(k-n)-1 = -1 \iff k=n$.

Also folgt nach Vorlesung:

$$\int_{\partial\mathbb{D}} z^{2(k-n)-1}\,dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } k=n \\ 0 & \text{falls } k\neq n. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} \cos(t)^{2n}\,dt = \frac{-i}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\int_{\partial\mathbb{D}} z^{2(k-n)-1}\,dz$$

$$= \frac{-i}{4^n}\binom{2n}{n}\cdot 2\pi i$$

$$= \frac{2\pi}{4^n}\cdot\binom{2n}{n} \qquad (\in\mathbb{R} \text{ wie es sein sollte..})$$

$\blacksquare$

Bemerkung:

Alleine mit „reellen Methoden" ist es ungleich schwieriger das Integral aus (ii) zu berechnen!