Funktionentheorie I, SoSe 2013 – Lösung Blatt 8

8.1. (i) • Es sei

$$I : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad s \longmapsto I(s) := \int_{\gamma_s} f(z)\,dz$$

die in Rede stehende Abbildung.

Sei $s_0 \in [0,1]$ fest und $\varepsilon > 0$. Dann genügt es zu zeigen:

$$\exists\ \delta > 0 \text{ mit } |I(s) - I(s_0)| < \varepsilon \quad \forall s \in [0,1] \text{ mit } |s - s_0| < \delta.$$

Denn damit ist dann I nach dem ε-δ-Kriterium in s_0 stetig und da $s_0 \in [0,1]$ beliebig war, die Behauptung insgesamt gezeigt.

• Da $[0,1] \times [0,1]$ Kompakt und H stetig ist, ist auch

$$K := H\big([0,1] \times [0,1]\big) \subset U$$

Kompakt. Da $f : U \to \mathbb{C}$ stetig ist, folgt mit dem Satz vom Maximum und Minimum:

$$\|f\|_K < \infty$$

Gilt nun $\|f\|_K = 0$ dann ist wegen der Stetigkeit von f

$$f(z) = 0 \quad \forall z \in K.$$

Also ist

$$I(s) = \int_{\gamma_s} f(z)\,dz = 0 \qquad \forall s \in [0,1]$$

d.h. I ist stetig. Wir betrachten also den Fall

$$0 < \|f\|_K < \infty .$$

- Nach Voraussetzung ist die Funktion

$$\frac{\partial H}{\partial t} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow U$$

stetig, also erhalten wir analog:

$$\left\| \frac{\partial H}{\partial t} \right\|_{[0,1]\times[0,1]} < \infty .$$

Gilt nun $\left\| \frac{\partial H}{\partial t} \right\|_{[0,1]\times[0,1]} = 0$ dann folgt wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial H}{\partial t}$

$$\frac{\partial H}{\partial t}(s,t) = 0 \qquad \forall\ (s,t) \in [0,1]\times[0,1]$$

also für $s \in [0,1]$ beliebig

$$\gamma_s'(t) = \frac{\partial H}{\partial t}(s,t) = 0 \qquad \forall t \in [0,1]$$

und folglich

$$I(s) = \int_{\gamma_s} f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma_s(t))\,\gamma_s'(t)\,dt = 0 \qquad \forall s \in [0,1].$$

Also ist I stetig. Wir betrachten also nur den Fall

$$0 < \left\| \frac{\partial H}{\partial t} \right\|_{[0,1]\times[0,1]} < \infty .$$

- Mit dieser Vorarbeit Konstruieren wir ein geeignetes δ.
Zunächst ist $f \circ H$ auf $[0,1] \times [0,1]$ stetig und damit wegen der Kompaktheit von $[0,1] \times [0,1]$ gleichmäßig stetig.

$\Rightarrow \forall \tilde{\varepsilon} > 0 \ \exists \tilde{\delta} > 0$ mit $|f(H(s,t)) - f(H(\tilde{s},\tilde{t}))| < \tilde{\varepsilon}$

$$\forall \ \|(s,t) - (\tilde{s},\tilde{t})\|_2 < \tilde{\delta}.$$

Da $\|(s,t) - (\tilde{s},t)\|_2 = |s-\tilde{s}|$ gilt, haben wir insbesondere:

$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \ \exists \tilde{\delta} > 0$ mit $|f(\gamma_s(t)) - f(\gamma_{\tilde{s}}(t))| < \tilde{\varepsilon}$

$$\forall \ |s-\tilde{s}| < \tilde{\delta} \ \text{ und } \ \forall t \in [0,1].$$

Indem wir $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2 \|\frac{\partial H}{\partial t}\|_{[0,1]\times[0,1]}} > 0$ wählen erhalten wir folgende Abschätzung:

$\exists \ \delta_1 > 0$ so dass gilt:

$$|f(\gamma_s(t)) - f(\gamma_{s_0}(t))| < \frac{\varepsilon}{2 \|\frac{\partial H}{\partial t}\|_{[0,1]\times[0,1]}} \qquad \forall \ |s-s_0| < \delta_1, \ \forall t \in [0,1] \tag{$*$}$$

- Da auch $\frac{\partial H}{\partial t}$ gleichmäßig stetig ist, erhalten wir völlig analog:

$\exists \ \delta_2 > 0$ so dass gilt:

$$\left|\frac{\partial H}{\partial t}(s,t) - \frac{\partial H}{\partial t}(s_0,t)\right| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_K} \qquad \forall \ |s-s_0| < \delta_2, \ \forall t \in [0,1] \tag{$**$}$$

• Wir wählen nun

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$$

so dass uns für $|s - s_0| < \delta$ sowohl die Abschätzung (*) als auch (**) zur Verfügung steht. Dann berechnen wir:

$$|I(s) - I(s_0)| = \left| \int_{\gamma_s} f(z)\,dz - \int_{\gamma_{s_0}} f(z)\,dz \right|$$

$$= \left| \int_0^1 f(\gamma_s(t))\gamma_s'(t)\,dt - \int_0^1 f(\gamma_{s_0}(t))\gamma_{s_0}'(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_0^1 \left(f(\gamma_s(t))\gamma_s'(t) - f(\gamma_{s_0}(t))\gamma_{s_0}'(t)\,dt \right|$$

$$\overset{\text{Standard-abschätzung}}{\leq} \int_0^1 \left| f(\gamma_s(t))\gamma_s'(t) - f(\gamma_{s_0}(t))\gamma_{s_0}'(t) \right| dt$$

$$= \int_0^1 \Big| f(\gamma_s(t))\gamma_s'(t) \underbrace{- f(\gamma_s(t))\gamma_{s_0}'(t) + f(\gamma_s(t))\gamma_{s_0}'(t)}_{=0} - f(\gamma_{s_0}(t))\gamma_{s_0}'(t) \Big|\, dt$$

$$= \int_0^1 \left| f(\gamma_s(t))\left(\gamma_s'(t) - \gamma_{s_0}'(t)\right) + \left(f(\gamma_s(t)) - f(\gamma_{s_0}(t))\right)\gamma_{s_0}'(t) \right| dt$$

$$\leq \int_0^1 \Bigg(\underbrace{|f(\gamma_s(t))|}_{\leq \|f\|_K} \cdot \underbrace{\left| \frac{\partial H}{\partial t}(s,t) - \frac{\partial H}{\partial t}(s_0,t) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2\|f\|_K} \text{ nach } (**)} + \underbrace{\left| f(\gamma_s(t)) - f(\gamma_{s_0}(t)) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2\left\|\frac{\partial H}{\partial t}\right\|_{[0,1]\times[0,1]}} \text{ nach } (*)} \cdot \underbrace{\left| \frac{\partial H}{\partial t}(s_0,t) \right|}_{\leq \left\|\frac{\partial H}{\partial t}\right\|_{[0,1]\times[0,1]}} \Bigg) dt$$

$$< \int_0^1 \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) dt = \varepsilon.$$

Damit ist die erforderliche Ungleichung gezeigt – I ist stetig. ok.

(ii) • $\mathbb{C}$ ist ein sternförmiges Gebiet mit $0 \in \mathbb{C}$ als Zentrum. Es genügt also zu zeigen:

Ist $\Delta \subset \mathbb{C}$ irgendein Dreieck welches 0 als Eckpunkt hat, dann ist $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$. (#)

Denn: Ist (#) bewiesen, dann folgt aus dem Integrabilitäts-Kriterium für sternförmige Gebiete wegen der Stetigkeit von f:

$$\exists\, F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \quad \text{mit} \quad F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Nach dem Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor ist F' aber holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ (denn F ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph).

$\Rightarrow$ f ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

• Wir behaupten nun, dass es genügt, die folgende abgeschwächte Variante von (#) zu beweisen:

Ist $\Delta \subset \mathbb{C}$ irgendein Dreieck, welches 0 als Eckpunkt hat, so dass $\Delta \subset \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ oder $\Delta \subset \overline{\mathbb{H}} \cup \mathbb{R}$ gilt, dann ist $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$. (##)

(Dabei ist $\overline{\mathbb{H}}$ die untere Halbebene: $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) < 0\}$).

Denn nehmen wir an, (##) wäre gezeigt. Ist dann $\Delta \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Dreieck mit 0 als Eckpunkt, dann unterscheiden wir die folgenden Fälle, wobei P_1 und P_2 die weiteren Eckpunkte von Δ seien:

- $P_1 \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$, $P_2 \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$.

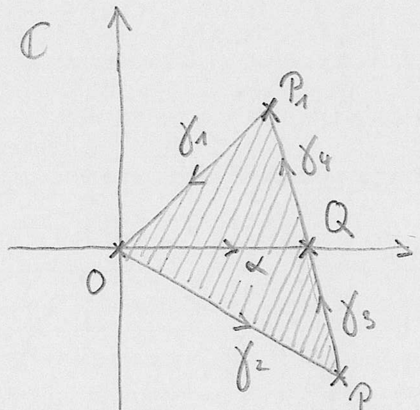
  $\Rightarrow \Delta \subset \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$, also gilt wegen (##) $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

- $P_1 \in \overline{\mathbb{H}} \cup \mathbb{R}$, $P_2 \in \overline{\mathbb{H}} \cup \mathbb{R}$

  $\Rightarrow \Delta \subset \overline{\mathbb{H}} \cup \mathbb{R}$, also gilt wegen (##) $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

- $P_1 \in \mathbb{H}$, $P_2 \in \overline{\mathbb{H}}$

  $\Rightarrow$ Die Strecke $[P_1, P_2]$ schneidet die reelle Achse in einem Punkt $Q \in \mathbb{R}$ und wir konstruieren Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \alpha$ wie folgt:



$\gamma_1 = [P_1, 0]$

$\gamma_2 = [0, P_2]$

$\gamma_3 = [P_2, Q]$

$\gamma_4 = [Q, P_1]$

$\alpha = [0, Q]$

Dann ist $\int_{\gamma_1+\alpha+\gamma_4} f(z)\,dz = 0$ nach dem ersten Fall (Dreieck in $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ mit 0 als Eckpunkt) und ferner erhalten wir $\int_{\gamma_2+\gamma_3-\alpha} f(z)dz = 0$ nach dem zweiten Fall, so dass mit Aufgabe 7.1 folgt:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz$$

$$+ \int_{\alpha} f(z)dz + \int_{-\alpha} f(z)dz$$

$$= \int_{\gamma_1+\alpha+\gamma_4} f(z)dz + \int_{\gamma_2+\gamma_3-\alpha} f(z)dz = 0+0 = 0.$$

- $P_1 \in \overline{\mathbb{H}}$, $P_2 \in \mathbb{H}$

$\Rightarrow$ Mit obigem Fall folgt durch vertauschen von P_1 und P_2 $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

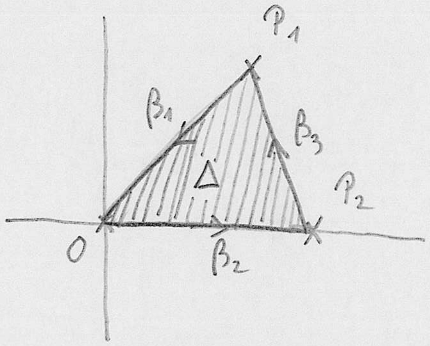
In jedem Fall ist also $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$, so dass wir die Implikation

$$(\#\#) \Rightarrow (\#)$$

bewiesen haben. Es genügt also $(\#\#)$ zu zeigen, wobei wir uns auf Dreiecke in $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ beschränken, da das Argument für Dreiecke in $\overline{\mathbb{H}} \cup \mathbb{R}$ völlig analog ist.

- Es sei also $\Delta \subset \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ ein Dreieck mit 0 als Eckpunkt. Wir zeigen: $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

Dazu seien P_1, P_2 die weiteren Eckpunkte von Δ und wir wählen Wege $\beta_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ für $j \in \{1,2,3\}$ wie folgt:



$$\beta_1 = [P_1, 0]$$
$$\beta_2 = [0, P_2]$$
$$\beta_3 = [P_2, P_1]$$

Ferner definieren wir für $j \in \{1,2,3\}$

$$H_j : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \qquad H_j(s,t) := \beta_j(t) + s \cdot i$$

$\Rightarrow$ H_j ist stetig partiell differenzierbar und folglich ist mit Teil (i)

$$I_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad s \longmapsto \int_{H_j(s,\cdot)} f(z)dz$$

stetig.

$\Rightarrow$ $I : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad I(s) := I_1(s) + I_2(s) + I_3(s)$

ist stetig.

Offenbar parametrisieren für $s \in [0,1]$ die $H_j(s,\cdot)$ den Rand des Dreiecks $\Delta + s \cdot i$, d.h. es ist

$$I(s) = \int_{\partial(\Delta + s\cdot i)} f(z)\,dz \qquad \forall\, s \in [0,1].$$

Nun ist aber für jedes $s \in (0,1]$

$$\partial(\Delta + s\cdot i) \subset \mathbb{H}$$

und da f nach Voraussetzung auf der offenen Menge $\mathbb{H}$ holomorph ist, folgt aus dem Integrallemma von Goursat:

$$\int_{\partial(\Delta + s\cdot i)} f(z)\,dz = 0.$$

Wir haben also gezeigt, dass

$$I(s) = 0 \qquad \forall\, s \in (0,1]$$

gilt. Da I aber stetig ist, folgt hieraus

$$I(0) = 0$$

und damit:

$$0 = I(0) = \int_{\partial(\Delta + 0\cdot i)} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz.$$

Damit haben wir (##) nachgewiesen womit alles gezeigt ist.

$\blacksquare$

8.2. • Nach dem Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor können wir f auf einer Kreisscheibe $B_R(p) \subset G$ mit $R > 0$ um den Punkt $p \in G$ in eine konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n \qquad \text{auf } B_R(p)$$

entwickeln.

• Ist $z \in B_R(p)$, d.h. $|z-p| < R$, dann berechnen wir:

$$|(-z+2p)-p| = |-z+p| = |z-p| < R$$

$$\Longrightarrow -z+2p \in B_R(p) \subset G.$$

Nach Voraussetzung gilt also für alle $z \in B_R(p)$:

$$f(z) \overset{-z+2p \in G}{=} f(-z+2p) \overset{-z+2p \in B_R(0)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-z+2p-p)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-z+p)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n (z-p)^n .$$

Mit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n (z-p)^n \qquad \text{auf } B_R(p)$$

haben wir also eine weitere Potenzreihenentwicklung von f auf $B_R(p)$ gefunden. Da aber die Koeffizienten nach dem Entwicklungssatz eindeutig durch f bestimmt werden, folgt:

$$a_n = (-1)^n a_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Insbesondere erhalten wir

$$a_n = 0 \qquad \forall \text{ ungeraden } n \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Entwicklungssatz gilt insbesondere für die Koeffizienten:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(p)}{n!} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Also haben wir bewiesen:

$$f^{(n)}(p) = 0 \qquad \forall \text{ ungeraden } n \in \mathbb{N}.$$

$\blacksquare$

<u>8.3.</u> Da die durch

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

auf $B_R(0)$ definierte Funktion holomorph ist, kann der Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor im Punkt

$$z_0 := \frac{R}{2} \in B_R(0)$$

angewandt werden.

$\Rightarrow$ f kann in z_0 in eine konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \qquad (*)$$

entwickelt werden, für deren Konvergenzradius r die Ungleichung

$$r \geq \frac{R}{2}$$

gilt (denn: $B_{\frac{R}{2}}(z_0)$ ist die größte Kreisscheibe um z_0, welche ganz in $B_R(0)$ liegt) und für die Koeffizienten gilt:

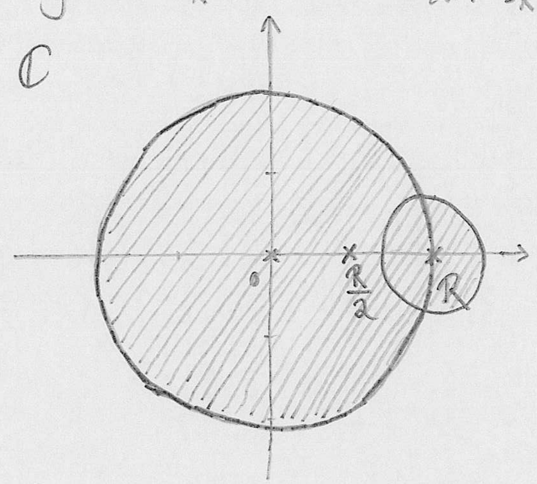
$$b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \overset{\text{Vorlesung}}{=} \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} n! \binom{k}{n} a_k z_0^{k-n}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k z_0^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n}{n} a_{k+n} z_0^{k} \qquad (**)$$

↯ f wäre im Punkt $R \in \mathbb{C}$ holomorph fortsetzbar.

$\Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ und $g: B_\varepsilon(R) \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$g\big|_{B_\varepsilon(R) \cap B_R(0)} \equiv f\big|_{B_\varepsilon(R) \cap B_R(0)}.$$



Also haben wir mit (*) die Potenzreihenentwicklung einer holomorphen Funktion, die auf der schraffierten Fläche

$$B_R(0) \cup B_\varepsilon(R)$$

gegeben ist.

$\Rightarrow$ Für den Konvergenzradius muss sogar $r > \frac{R}{2}$ gelten (nach dem Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor $\overset{!}{\nabla}$).

$\Rightarrow \exists\ \delta > 0$ so dass die Reihe (*) im Punkt

$$R + \delta \in B_\varepsilon(R)$$

Konvergiert.

Zusammen mit der Formel (**) für die Koeffizienten b_n erhalten wir also:

Die Doppelreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{K=0}^{\infty}\binom{K+n}{n} a_{K+n}\left(\frac{R}{2}\right)^{K}\left(R+\delta-\frac{R}{2}\right)^{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{K=0}^{\infty}\underbrace{\binom{K+n}{n} a_{K+n}\left(\frac{R}{2}\right)^{K}\left(\frac{R}{2}+\delta\right)^{n}}_{=:\,c_{n,K}}$$

Komplexer Zahlen $c_{n,K}$ Konvergiert. Da die a_{K+n} nach Voraussetzung und R und δ nach Konstruktion positive reelle Zahlen sind, folgt:

Die $c_{n,K}$ sind positive reelle Zahlen!.

$\overset{\text{Analysis I}}{\Longrightarrow}$ Die Doppelreihe Konvergiert absolut und darf folglich beliebig umgeordnet werden, ohne die Konvergenz zu beeinflussen.

Wir ordnen die $c_{n,K}$ aufsteigend nach $n+K=m$ (d.h. für K und m ist $n=m-K$) und erhalten die Konvergente Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{K=0}^{m} c_{m-K,K} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{K=0}^{m}\binom{K+m-K}{m-K} a_{K+m-K}\left(\frac{R}{2}\right)^{K}\left(\frac{R}{2}+\delta\right)^{m-K}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\sum_{K=0}^{m} \binom{m}{m-K} \left(\frac{R}{2}\right)^{K} \left(\frac{R}{2}+\delta\right)^{m-K} \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\sum_{K=0}^{m} \binom{m}{K} \left(\frac{R}{2}\right)^{K} \left(\frac{R}{2}+\delta\right)^{m-K} \right)$$

$$\overset{\text{binomische Formel}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\frac{R}{2}+\frac{R}{2}+\delta\right)^{m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \, (R+\delta)^{m}.$$

$\Rightarrow$ Die Ausgangsreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Konvergiert im Punkt $R+\delta \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Nach dem Lemma von Abel Konvergiert die Reihe auf $B_{|R+\delta|}(0) = B_{R+\delta}(0)$, d.h. der Konvergenzradius ist $\geq R+\delta$

Also: $R \geq R+\delta \overset{\delta>0}{>} R$ $\lightning$

Also ist f im Punkt $R \in \mathbb{C}$ doch nicht holomorph fortsetzbar.

$\blacksquare$