Funktionentheorie I, SoSe 2013 – Lösung Blatt 9

9.1. (i) Seien $w \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

$\lightning$ $|w - f(z)| \geq \varepsilon \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Dann ist insbesondere $f(z) \neq w$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und folglich ist die Funktion

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{w - f(z)}$$

wohldefiniert und (offenbar) holomorph. Wir schätzen ab:

$$|g(z)| = \left|\frac{1}{w - f(z)}\right| = \frac{1}{|w - f(z)|} \leq \frac{1}{\varepsilon} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$\Rightarrow$ g ist beschränkt

$\overset{\text{Liouville}}{\Longrightarrow}$ g ist Konstant

$\Rightarrow$ f ist Konstant $\quad \lightning$ Voraussetzung.

Also gibt es doch ein $z \in \mathbb{C}$ mit

$$|w - f(z)| < \varepsilon.$$

ok.

(ii) Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$g := \exp \circ f : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Für beliebiges $z \in \mathbb{C}^\times$ ist dann

$$|g(z)| = |\exp(f(z))| = |\exp(\mathrm{Re}(f(z)) + i\,\mathrm{Im}(f(z)))|$$

$$= \underbrace{|\exp(\mathrm{Re}(f(z)))|}_{\in \mathbb{R}_+ \text{ da reelle exp-Fkt.}} \cdot \underbrace{|\cos(\mathrm{Im}(f(z))) + i \sin(\mathrm{Im}(f(z)))|}_{=1 \text{ da Zahl auf } S^1 \text{ liegt}}$$

$$= \exp(\underbrace{\mathrm{Re}(f(z))}_{\leq C}).$$

$$\leq \exp(C)$$

wobei wir die Monotonie der reellen Exponentialfunktion verwendet haben.

$\Rightarrow$ g ist beschränkt und damit insbesondere beschränkt um den Punkt $0 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Nach dem Riemannschen Fortsetzungssatz gibt es eine holomorphe Fortsetzung von g in den Punkt $0 \in \mathbb{C}$, d.h. $\exists$ holomorphe Funktion $\tilde{g} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{g}|_{\mathbb{C}^\times} \equiv g$.

Nach Konstruktion gilt aber

$$|\tilde{g}(z)| \leq \max\{\exp(c), |\tilde{g}(0)|\} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ $\tilde{g}$ ist beschränkt

$\overset{\text{Liouville}}{\Rightarrow}$ $\tilde{g}$ ist konstant

$\Rightarrow$ $g \equiv \tilde{g}|_{\mathbb{C}^\times}$ ist konstant.

Also folgt

$$0 = g'(z) = (\exp \circ f)'(z) = f'(z) \underbrace{\exp(f(z))}_{\neq 0} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^\times$$

$\Rightarrow$ $f'(z) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}^\times$

$\Rightarrow$ f ist konstant (denn $\mathbb{C}^\times$ ist ein Gebiet $\overset{\text{!}}{\nabla}$)

$\blacksquare$

9.2. Wir zeigen zunächst, dass auch $G\setminus B$ regulär offen ist. Da B eine abgeschlossene Kreisscheibe ist, gilt offenbar: $\overline{B^\circ} = B$. Damit berechnen wir:

$$\overline{G\setminus B}^\circ = \overline{(G\cap B^c)}^\circ \subset \left(\overline{G}\cap \overline{(B^c)}\right)^\circ = \left(\overline{G}\cap (B^\circ)^c\right)^\circ$$

$$= \overline{G}^\circ \cap \left((B^\circ)^c\right)^\circ \overset{G \text{ reg. off.}}{=} G\cap \left(\overline{B^\circ}\right)^c = G\cap B^c = G\setminus B.$$

Andererseits gilt:

$$G\setminus B \subset \overline{G\setminus B} \Rightarrow G\setminus B \overset{G\setminus B \text{ offen}}{\overset{!}{=}} (G\setminus B)^\circ \subset \overline{G\setminus B}^\circ$$

Insgesamt haben wir gezeigt:

$$\overline{G\setminus B}^\circ = G\setminus B$$

Also ist $G\setminus B$ regulär offen.

Damit kommen wir zur Aufgabe.

$f: G\setminus\{p\} \to G\setminus B$ ist eine biholomorphe Abbildung.

- Da G nach Voraussetzung beschränkt ist und

$$f(G\setminus\{p\}) = G\setminus B \subset G$$

gilt, ist f insbesondere um den Punkt p herum beschränkt. Nach dem Riemannschen Fortsetzungssatz existiert also eine holomorphe Fortsetzung in den Punkt p, d.h. $\exists\, \tilde{f}: G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\tilde{f}|_{G\setminus\{p\}} = f$.

- Da $G \subset \mathbb{C}$ offen und $p \in G$ ist, gibt es eine Folge $p_n \in G \setminus \{p\}$ mit $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Also folgt:

$$\tilde{f}(p) = \tilde{f}\left(\lim_{n\to\infty} p_n\right) \overset{\tilde{f}\text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(p_n) \overset{p_n \in G\setminus\{p\}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(p_n)}_{\in G\setminus B}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{f}(p) \in \overline{G \setminus B}.$$

- Da f nach Annahme biholomorph ist, ist f insbesondere nicht Konstant.

$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ ist nicht Konstant

$\overset{\text{Offenheits-}}{\underset{\text{satz}}{\Rightarrow}}$ $\tilde{f}(G) \subset \mathbb{C}$ ist offen.

Es ist:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(G) &= \tilde{f}\big((G\setminus\{p\}) \cup \{p\}\big) = \tilde{f}\big(G\setminus\{p\}\big) \cup \{\tilde{f}(p)\} \\
&= f\big(G\setminus\{p\}\big) \cup \{\tilde{f}(p)\} \\
&= G\setminus B \cup \underbrace{\{\tilde{f}(p)\}}_{\subset \overline{G\setminus B} \text{ s.o.}} \\
&\subset \overline{G\setminus B}.
\end{aligned}$$

Also:

$$\tilde{f}(G) \overset{\tilde{f}(G)\text{ offen}}{=} \left(\tilde{f}(G)\right)^\circ \subset \overline{G\setminus B}^{\,\circ} \overset{G\setminus B\text{ reg. off.}}{=} G\setminus B$$

Für die Fortsetzung $\tilde{f}$ von f gilt also sogar:

$$\tilde{f}: G \longrightarrow G \setminus B.$$

$\Rightarrow$ $g := f^{-1} \circ \tilde{f} : G \longrightarrow G \setminus \{p\}$

ist wohldefiniert und holomorph (beachte, dass f^{-1} als holomorphe Abbildung existiert, da f nach Annahme biholomorph ist).

• Für $z \in G \setminus \{p\}$ ist nun aber

$$g(z) = f^{-1}(\tilde{f}(z)) = f^{-1}(f(z)) = z.$$

$\Rightarrow$ $g|_{G \setminus \{p\}} \equiv \mathrm{id}$

Da g aber insbesondere stetig ist, muss auch

$$g(p) = \mathrm{id}(p) = p$$

gelten. $\lightning$ $g(p) \in G \setminus \{p\}$ d.h. $g(p) \neq p$.

Also gibt es doch keine biholomorphe Abbildung

$$f: G \setminus \{p\} \longrightarrow G \setminus B.$$

$\blacksquare$

9.3. (i). Um einfacher formulieren zu können zeigen wir vorab, dass in der vorgelegten Situation jede Funktion

$$h : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{C}$$

welche auf $\overline{G}$ stetig und auf G holomorph ist, ihr betragliches Maximum auf ∂G annimmt. (*)

Dazu:

Da G beschränkt ist, ist $\overline{G} \subset \mathbb{C}$ kompakt. Da $|h|$ stetig ist gibt es also nach dem Satz vom Maximum und Minimum ein $w \in \overline{G}$ mit

$$|h(z)| \leq |h(w)| \qquad \forall\, z \in \overline{G}.$$

Gilt $w \in \partial G$, dann ist die Behauptung (*) gezeigt.
Gilt $w \in G$, dann folgt aus dem Maximumsprinzip wegen der Holomorphie von h auf G:

$$h|_G \text{ ist konstant.}$$

Gelte etwa $h(z) = \mu \quad \forall\, z \in G$ mit einem festen $\mu \in \mathbb{C}$.
Ist dann $z_0 \in \partial G$, dann gibt es eine Folge $p_n \in G$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = z_0$, also:

$$h(z_0) = h\left(\lim_{n\to\infty} p_n\right) \overset{h \text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} h(p_n) = \lim_{n\to\infty} \mu = \mu.$$

Also gilt auch $h(z_0) = \mu$ für alle $z_0 \in \partial G$ und (*) ist gezeigt, da h konstant ist.

• Damit zur Aufgabe. Nach Voraussetzung sind die Funktionen

$$\frac{f}{g} : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{C}^\times \qquad \text{und} \qquad \frac{g}{f} : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

wohldefiniert, stetig auf $\overline{G}$ und holomorph auf G.

Indem wir $(*)$ auf $\frac{f}{g}$ anwenden, erhalten wir ein $p \in \partial G$ mit:

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq \left|\frac{f(p)}{g(p)}\right| \overset{p \in \partial G,\, \text{Vor.}}{=} 1 \qquad \forall z \in \overline{G}$$

Wenden wir dagegen $(*)$ auf $\frac{g}{f}$ an, dann erhalten wir ein $q \in \partial G$ mit:

$$0 < \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| \leq \left|\frac{g(q)}{f(q)}\right| \overset{q \in \partial G,\, \text{Vor.}}{=} 1 \qquad \forall z \in \overline{G}$$

Insgesamt folgt damit:

$$1 \leq \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq 1 \quad \forall z \in \overline{G}, \text{ d.h. } \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| = 1 \quad \forall z \in \overline{G}.$$

$\Rightarrow$ Die holomorphe Funktion $\left.\frac{f}{g}\right|_G$ bildet G nach $S^1 \subset \mathbb{C}$ ab.

$\overset{\text{Offenheits-}}{\underset{\text{satz}}{\Longrightarrow}}$ $\left.\frac{f}{g}\right|_G$ ist konstant und damit aus Stetigkeitsgründen (wie im Beweis von $(*)$) auch $\frac{f}{g}$.

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{C}$ mit $\frac{f(z)}{g(z)} = c \quad \forall z \in \overline{G}$, d.h.

$$f(z) = c \cdot g(z) \quad \forall z \in \overline{G}.$$

Außerdem folgt für einen beliebigen Punkt $z_0 \in \overline{G}$:

$$1 = \left|\frac{f(z_0)}{g(z_0)}\right| = |c| \quad , \quad \text{d.h. } c \in S^1.$$

ok.

(ii) Da $p \in G$ ein lokales Minimum von $|f|$ ist, gibt es eine offene Umgebung $U \subset G$ um p mit

$$|f(p)| \leq |f(z)| \qquad \forall z \in U.$$

Wegen $f(p) \neq 0$ ist insbesondere

$$0 < |f(p)| \leq |f(z)|, \text{ d.h. } f(z) \neq 0 \quad \forall z \in U.$$

$\Rightarrow$ Die Funktion

$$g : U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{f(z)}$$

ist wohldefiniert und holomorph auf U mit

$$|g(z)| = \left|\frac{1}{f(z)}\right| \overset{\text{s.o.}}{\leq} \left|\frac{1}{f(p)}\right| = |g(p)| \qquad \forall z \in U,$$

d.h. g besitzt sein Betragsmaximum in $p \in U$.

$\overset{\text{Maximums-}}{\underset{\text{prinzip}}{\Longrightarrow}}$ g ist konstant (OE sei U ein Gebiet).

$\Rightarrow f|_U$ ist eine Konstante Funktion.

Da aber $U \subset G$ offen ist, folgt mit dem Identitäts-satz: f ist auf G Konstant.

$\blacksquare$