

Alternativklausur zur Funktionentheorie I

Montag, den 30.09.2013, 09:15–11:15 Uhr,
Hörsaal I, Mehrzweckgebäude, Lahnberge

Name:

.....

Vorname:

..... Musterlösung

Matrikelnummer:

.....

Studiengang:

.....

Diese Prüfung ist mein letzter Prüfungsversuch in diesem Modul: ☐ ja ☐ nein

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter dem Aufgabentext, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Es sind keine Hilfsmittel zulässig.

Es werden maximal 50 Punkte erwartet, d.h. 50 Punkte entsprechen 100%.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
max. Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punkte							

Name:

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. Es werden keine Begründungen verlangt.

Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet. Wird in der Summe eine negative Punktzahl erreicht, so wird diese auf 0 Punkte aufgerundet.

1. Ist $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ in allen Punkten $p \in U$ stetig differenzierbar und winkeltreu, so ist f oder $\bar{f}$ holomorph.
wahr ☒ falsch ☐
2. Konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ in einem Punkt $w \in \mathbb{C}$, dann konvergiert sie auf ganz $B_{|w|}(0)$ normal.
wahr ☒ falsch ☐
3. Auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gibt es eine holomorphe Logarithmusfunktion.
wahr ☒ falsch ☐
4. Jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt eine Stammfunktion.
wahr ☐ falsch ☒
5. Jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ kann um jeden Punkt $p \in G$ in eine Potenzreihe entwickelt werden, die auf ganz G konvergiert.
wahr ☐ falsch ☒
6. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte, holomorphe Funktion, so ist f konstant.
wahr ☐ falsch ☒
7. Es gibt eine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$.
wahr ☐ falsch ☒
8. Erfüllen $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{\times})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$, dann gilt bereits $f = g$.
wahr ☐ falsch ☒
9. Ist die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}$ in 0 stetig fortsetzbar, dann ist f in 0 auch holomorph fortsetzbar.
wahr ☒ falsch ☐
10. Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt in 0 eine hebbare Singularität oder eine Polstelle genau dann, wenn für jede Nullfolge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ die Folge $(f(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{C}}$ konvergiert.
wahr ☒ falsch ☐

Name:

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ferner gebe es eine differenzierbare Funktion $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\operatorname{Re}(f) = \psi \circ \operatorname{Im}(f)$$

gilt. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

• Sei $u := \operatorname{Re}(f)$ und $v := \operatorname{Im}(f)$.

$\Rightarrow f = u + iv$ und nach Voraussetzung gilt

$$u = \psi \circ v.$$

• Wir verwenden die Cauchy-Riemann-DGL:

$$\frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{\text{C-R.}}{=} \frac{\partial u}{\partial x} \stackrel{\text{Vor.}}{=} \frac{\partial (\psi \circ v)}{\partial x} \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \psi' \circ v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\stackrel{\text{C-R.}}{=} -\psi' \circ v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{\text{Vor.}}{=} -\psi' \circ v \cdot \frac{\partial (\psi \circ v)}{\partial y} = -(\psi' \circ v)^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(1 + (\psi' \circ v)^2\right)}_{> 0 \text{ auf } G} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{auf ganz } G.$$

$$\stackrel{\text{C-R.}}{\Rightarrow} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{auf ganz } G.$$

• Analog berechnen wir:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \stackrel{\text{C.R.}}{=} - \frac{\partial U}{\partial y} \stackrel{\text{Vor.}}{=} - \frac{\partial(\psi \circ v)}{\partial y} \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} - \psi' \circ v \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\stackrel{\text{C.R.}}{=} - \psi' \circ v \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \stackrel{\text{Vor.}}{=} - \psi' \circ v \cdot \frac{\partial(\psi \circ v)}{\partial x} = - (\psi' \circ v)^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(1 + (\psi' \circ v)^2\right)}_{>0 \text{ auf } G} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{auf ganz } G.$$

$$\stackrel{\text{C.R.}}{\Rightarrow} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{auf ganz } G.$$

• Insgesamt folgt für das totale Differential von f

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = 0.$$

Da G als Gebiet zusammenhängend ist, folgt aus der reellen Analysis, dass f konstant ist.



Name:

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Berechnen Sie das folgende Integral, wobei der Rand der Kreisscheibe in positiver Drehrichtung durchlaufen werde.

$$\int_{\partial B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \sin(\pi z)} dz$$

- Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \sin(\pi z).$$

Wegen $\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}$, sowie

$$\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi z}{2} \in \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2}(z-1) \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow z \in \mathbb{Z} \text{ ungerade}$$

erhalten wir: $\{z \in \mathbb{C} \mid g(z) = 0\} = \mathbb{Z}$.

- Nun entwickeln wir g in 0 in eine (auf ganz $\mathbb{C}$) Konvergente Potenzreihe $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Dann ist

$$a_0 = \frac{g(0)}{0!} = 0$$

und wegen

$$g'(z) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \sin(\pi z) + \pi \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \cos(\pi z)$$

ist

$$a_1 = \frac{g'(0)}{1!} = g'(0) = \pi \neq 0.$$

Damit folgt für $z \in \mathbb{C}$:

$$g(z) = z \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^k}_{=: h(z)}$$

und $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph mit $h(0) = a_1 = \pi$,
so dass $\frac{1}{h}$ auf $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\}$ wohldefiniert ist.

- Wegen $\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)} \subset (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\}$ sowie $0 \in B_{\frac{1}{2}}(0)$
ist die Cauchy-Integralformel anwendbar und liefert:

$$\int_{\partial B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \sin(\pi z)} dz = \int_{\partial B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{1}{g(z)} dz = \int_{\partial B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{1}{z \cdot h(z)} dz$$

$$= \int_{\partial B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{\left(\frac{1}{h(z)}\right)}{z - 0} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{h(0)} = \frac{2\pi i}{\pi}$$

$$= 2i.$$



Name:

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Zeigen Sie: Für jede holomorphe Abbildung $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ gilt:

$$|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2.$$

- Wir definieren

$$g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad z \mapsto \frac{z - f(0)}{\overline{f(0)}z - 1}.$$

Dann ist g wohldefiniert, da es wegen $f(0) \in \mathbb{D}$ nach Vorlesung ein Automorphismus von $\mathbb{D}$ ist.

- Von ist $g \circ f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorph mit
 $g \circ f(0) = 0.$

Lemma von
 $\Rightarrow$
Schwarz

$$|(g \circ f)'(0)| \leq 1 \quad (*)$$

- Wir berechnen nun:

$$g'(z) = \frac{1 \cdot (\overline{f(0)}z - 1) - (z - f(0)) \cdot \overline{f(0)}}{(\overline{f(0)}z - 1)^2}$$

$$= \frac{\overline{f(0)}z - 1 - \overline{f(0)}z + |f(0)|^2}{(\overline{f(0)}z - 1)^2}$$

$$= \frac{|f(0)|^2 - 1}{(\overline{f(0)}z - 1)^2}.$$

Insbesondere erhalten wir:

$$g'(f(0)) = \frac{|f(0)|^2 - 1}{(|f(0)|^2 - 1)^2} = \frac{1}{|f(0)|^2 - 1}.$$

• Indem wir (*) verwenden, folgt also:

$$1 \geq |(g \circ f)'(0)| \stackrel{g, f \text{ holomorph}}{\downarrow} = |g'(f(0)) \cdot f'(0)|$$

$$= \frac{|f'(0)|}{\underbrace{| |f(0)|^2 - 1 |}_{< 1}} = \frac{|f'(0)|}{1 - |f(0)|^2}.$$

$$\Rightarrow |f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2;$$



(Alternative: Satz von Pick im Punkt $z=0$.)

Name:

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Bestimmen Sie zur Funktion

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{\sin(i\pi z) \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$$

die isolierten Singularitäten und deren Art. Geben Sie im Fall einer hebbaren Singularität die holomorphe Fortsetzung und im Falle eines Pols die Ordnung an.

• Es ist $\sin(i\pi z) = 0 \Leftrightarrow i\pi z \in \pi\mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow z \in i\mathbb{Z}$

(enthält die undefinierte Stelle 0 von $\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$).

Ferner ist

$$\sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{z} \in \pi\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow z \in \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\},$$

so dass obiger Ausdruck für f insgesamt in den Punkten der Menge

$$i\mathbb{Z} \cup \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

undefiniert ist. Da alle Elemente dieser Menge mit Ausnahme der 0 isoliert liegen sind

$$(i\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \cup \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

isolierte Singularitäten von f . Ob auch 0 eine

isolierte Singularität ist, Können wir erst später entscheiden. ∇

• Behauptung: f besitzt in i und $-i$ hebbare Singularitäten mit Fortsetzung durch den Wert $\frac{2}{\pi \sin(i\pi)}$.

$$\text{Wegen } f(-z) = \frac{(-z)^2 + 1}{\sin(-i\pi z) \sin\left(-\frac{\pi}{z}\right)} = \frac{z^2 + 1}{\sin(i\pi z) \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)} = f(z)$$

genügt es, die Behauptung für i zu zeigen.

Es ist

$$\sin(i\pi i) \sin\left(\frac{\pi}{i}\right) = \underbrace{\sin(-\pi)}_{=0} \sin\left(\frac{\pi}{i}\right) = 0$$

und mit

$$\left(\sin(i\pi z) \sin\left(\frac{\pi}{z}\right) \right)' = i\pi \cos(i\pi z) \sin\left(\frac{\pi}{z}\right) - \pi \sin(i\pi z) \cos\left(\frac{\pi}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}$$

ist

$$\left(\sin(i\pi z) \sin\left(\frac{\pi}{z}\right) \right)' \Big|_i = i\pi \underbrace{\cos(-\pi)}_{=-1} \sin(-i\pi) + \pi \underbrace{\sin(-\pi)}_{=0} \cos\left(\frac{\pi}{i}\right)$$

$$= -i\pi \sin(-i\pi) \neq 0$$

so dass es auf einer Umgebung U um i ein $g \in \mathcal{O}(U)$ gibt, mit

$$\sin(i\pi z) \sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = (z-i) \cdot g(z) \quad \forall z \in U$$

$$\text{und } g(i) = -i\pi \sin(-i\pi).$$

Also finden wir auf $U \setminus \{i\}$:

$$f(z) = \frac{(z-i)(z+i)}{(z-i) \cdot g(z)} = \frac{z+i}{g(z)}.$$

$\Rightarrow f$ besitzt in i eine hebbare Singularität und für die holomorphe Fortsetzung folgt

$$f(i) = \frac{2i}{g(i)} = \frac{2i}{-i\pi \sin(-i\pi)} = \frac{2}{\pi \sin(i\pi)}. \quad \text{ok.}$$

Behauptung: f besitzt in $i\mathbb{Z} \setminus \{-i, 0, i\}$ Polstellen der Ordnung 1.

Sei also $p \in i\mathbb{Z} \setminus \{-i, 0, i\}$, dann ist

$$\underbrace{\sin(i\pi p)}_{=0} \sin\left(\frac{\pi}{p}\right) = 0$$

und (siehe oben):

$$\begin{aligned} \left(\sin(i\pi z) \sin\left(\frac{\pi}{z}\right) \right)' \Big|_p &= i\pi \cos(i\pi p) \sin\left(\frac{\pi}{p}\right) - \underbrace{\pi \sin(i\pi p)}_{=0} \cos\left(\frac{\pi}{p}\right) \cdot \frac{1}{p^2} \\ &= i\pi \underbrace{\cos(i\pi p)}_{=\pm 1 \neq 0} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}_{\neq 0} \neq 0. \end{aligned}$$

Also gibt es auf einer Umgebung U um p ein $g \in \mathcal{O}(U)$, so dass gilt:

$$\sin(i\pi z) \sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = (z-p) \cdot g(z) \quad \forall z \in U$$

und $g(p) \neq 0$.

Damit finden wir auf $U \setminus \{p\}$:

$$f(z) = \frac{\left(\frac{z^2+1}{g(z)}\right)}{(z-p)} \quad \left\{ \text{holomorph auf ganz } U. \right.$$

$\Rightarrow f$ besitzt in p einen Pol der Ordnung 1. ok.

• Behauptung: f besitzt in den Punkten $p = \frac{1}{k}$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ Polstellen der Ordnung 1.

Dies zeigt man völlig analog wie oben, da solche p ebenfalls keine Nullstellen von $z \mapsto z^2 + 1$ sind. ok.

• Bleibt $0 \in \mathbb{C}$ übrig. Da sich wegen obigem Punkt in den $\left\{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$ die Polstellen von f in 0 häufen, liegt hier keine isolierte Singularität vor.



Name:

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Menge aller injektiven, holomorphen Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Hinweis: Untersuchen Sie die Laurent-Entwicklung von $f(1/z)$ im Nullpunkt.

- Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine injektive, holomorphe Funktion. Nach dem Entwicklungssatz kann f in 0 in eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

entwickelt werden.

- Dann ist

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{-\infty} a_{-k} z^k \quad (*)$$

die Laurentreihe von $f(1/z)$ um 0 .

- Da f injektiv ist, ist auch $z \mapsto f(1/z)$ auf ganz $\mathbb{C}^{\times}$ injektiv

$\Rightarrow f(1/z)$ besitzt in $z=0$ keine wesentliche Singularität

(Denn: Da $f(\frac{1}{z})$ injektiv ist, ist das Bild von $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C}$ offen und disjunkt zum Bild von $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ unter $f(\frac{1}{z})$. Also ist das Bild von $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ unter $f(\frac{1}{z})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ und $f(\frac{1}{z})$ besitzt nach Casorati-Weierstraß keine wesentliche Singularität in 0).

- $\Rightarrow$ Die Laurentreihe (*) ist endlich, d.h. für ein $n \in \mathbb{N}$ ist $a_k = 0 \quad \forall k > n$.

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \text{ ist ein Polynom.}$$

- Da f injektiv ist, besitzt f' keine Nullstellen und muss als Polynom daher konstant sein.

$$\Rightarrow \deg f = 1, \text{ d.h. } n = 1 \text{ und damit:}$$

$$f(z) = a_0 + a_1 z \quad \text{mit } a_1 \neq 0.$$

- Da ferner offenbar alle Funktionen dieser Gestalt injektiv und holomorph sind, ergibt sich für die gesuchte Menge M :

$$M = \{f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(z) = a + bz \text{ für } a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}^{\times}\}.$$

