

Alternativklausur zur Funktionentheorie I

Montag, den 30.09.2013, 09:15–11:15 Uhr,
Hörsaal I, Mehrzweckgebäude, Lahnberge

Name:

.....

Vorname:

.....

Matrikelnummer:

.....

Studiengang:

.....

Diese Prüfung ist mein letzter Prüfungsversuch in diesem Modul: ☐ ja ☐ nein

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter dem Aufgabentext, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Es sind keine Hilfsmittel zulässig.

Es werden maximal 50 Punkte erwartet, d.h. 50 Punkte entsprechen 100%.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
max. Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punkte							

Name:

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. Es werden keine Begründungen verlangt.

Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet. Wird in der Summe eine negative Punktzahl erreicht, so wird diese auf 0 Punkte aufgerundet.

1. Ist $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ in allen Punkten $p \in U$ stetig differenzierbar und winkeltreu, so ist f oder $\bar{f}$ holomorph.

wahr ☐ falsch ☐

2. Konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ in einem Punkt $w \in \mathbb{C}$, dann konvergiert sie auf ganz $B_{|w|}(0)$ normal.

wahr ☐ falsch ☐

3. Auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gibt es eine holomorphe Logarithmusfunktion.

wahr ☐ falsch ☐

4. Jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt eine Stammfunktion.

wahr ☐ falsch ☐

5. Jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ kann um jeden Punkt $p \in G$ in eine Potenzreihe entwickelt werden, die auf ganz G konvergiert.

wahr ☐ falsch ☐

6. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte, holomorphe Funktion, so ist f konstant.

wahr ☐ falsch ☐

7. Es gibt eine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$.

wahr ☐ falsch ☐

8. Erfüllen $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{\times})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$, dann gilt bereits $f = g$.

wahr ☐ falsch ☐

9. Ist die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}$ in 0 stetig fortsetzbar, dann ist f in 0 auch holomorph fortsetzbar.

wahr ☐ falsch ☐

10. Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt in 0 eine hebbare Singularität oder eine Polstelle genau dann, wenn für jede Nullfolge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ die Folge $(f(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{C}}$ konvergiert.

wahr ☐ falsch ☐

Name:

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ferner gebe es eine differenzierbare Funktion $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\operatorname{Re}(f) = \psi \circ \operatorname{Im}(f)$$

gilt. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Name:

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Berechnen Sie das folgende Integral, wobei der Rand der Kreisscheibe in positiver Drehrichtung durchlaufen werde.

$$\int_{\partial B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \sin(\pi z)} dz$$

Name:

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Zeigen Sie: Für jede holomorphe Abbildung $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ gilt:

$$|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2.$$

Name:

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Bestimmen Sie zur Funktion

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{\sin(i\pi z) \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$$

die isolierten Singularitäten und deren Art. Geben Sie im Fall einer hebbaren Singularität die holomorphe Fortsetzung und im Falle eines Pols die Ordnung an.

Name:

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Menge aller injektiven, holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Hinweis: Untersuchen Sie die Laurent-Entwicklung von $f(1/z)$ im Nullpunkt.

Name:

Zusatzblatt 1

Name:

Zusatzblatt 2