Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2013

Klausur zur Funktionentheorie I

Freitag, den 26.07.2013, 09:15–11:15 Uhr,
Hörsaal B, Hörsaalgebäude Chemie, Lahnberge

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Diese Prüfung ist mein letzter Prüfungsversuch in diesem Modul: ☐ ja ☐ nein

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter dem Aufgabentext, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Es sind keine Hilfsmittel zulässig.

Es werden maximal 50 Punkte erwartet, d.h. 50 Punkte entsprechen 100%.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
max. Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punkte							

Name: ....

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. Es werden keine Begründungen verlangt.

Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet. Wird in der Summe eine negative Punktzahl erreicht, so wird diese auf 0 Punkte aufgerundet.

1. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ für $D \subset \mathbb{C}$ offen ist in $p \in D$ holomorph, wenn f in p die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt.

   wahr ☐ *falsch* ☐

2. Sei $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Funktionenfolge. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in N}$ auf jeder beschränkten Menge $B \subset \mathbb{C}$ gleichmäßig.

   wahr ☐ *falsch* ☐

3. Auf dem Kreisring $B_{1,2}(0)$ gibt es eine holomorphe Logarithmusfunktion.

   wahr ☐ *falsch* ☐

4. Ist $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem sternförmigen Gebiet G, dann hängt das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ ab.

   wahr ☐ *falsch* ☐

5. Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist f beliebig oft stetig partiell differenzierbar.

   wahr ☐ *falsch* ☐

6. Die Taylorreihe einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um einen beliebigen Punkt $p \in \mathbb{C}$ hat den Konvergenzradius ∞.

   wahr ☐ *falsch* ☐

7. Es gibt eine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$.

   wahr ☐ *falsch* ☐

8. Besitzt die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ überabzählbar viele Nullstellen, dann gilt bereits $f = 0$.

   wahr ☐ *falsch* ☐

9. Besitzt die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ in 0 eine hebbare Singularität, dann kann f mit dem Wert $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta$ in 0 holomorph fortgesetzt werden.

   wahr ☐ *falsch* ☐

10. Besitzt die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ in 0 eine wesentliche Singularität, dann gibt es zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine Nullfolge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$, so dass die Folge $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen w konvergiert.

    wahr ☐ *falsch* ☐

Name: ....

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $p \in G$ ein Punkt und

$$f : G \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion deren Ableitung $f' : G \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ in p holomorph fortsetzbar ist. Zeigen Sie, dass dann auch f in p holomorph fortsetzbar ist.

Name: ....

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Berechnen Sie das folgende Integral wobei der Rand der Kreisscheibe in positiver Drehrichtung durchlaufen werde.

$$\int_{\partial B_1(\frac{i}{2})} \frac{\exp(\pi z)}{z^2+1}\, dz$$

Name: ....

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow G, \qquad g : \mathbb{D} \longrightarrow G$$

zwei holomorphe Funktionen. Es gelte $f(0) = g(0)$ und f sei biholomorph. Zeigen Sie, dass für alle $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < 1$

$$g\left(B_r(0)\right) \subset f\left(B_r(0)\right)$$

gilt.

Name: ....

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Paare (f, g) ganzer Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) = g(\overline{z})$$

für alle $z \in \partial\mathbb{D}$ gilt.

Name: ....

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Bestimmen Sie zur Funktion

$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{\cos\left(\pi z\right)}$$

die isolierten Singularitäten und deren Art. Geben Sie im Fall einer hebbaren Singularität die holomorphe Fortsetzung und im Falle eines Pols die Ordnung an.

Name: ....

Zusatzblatt 1

Name: ....

Zusatzblatt 2