Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2013

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 1 –

Abgabe: Dienstag, den 30.04.2013, 12:00 – 12:10 Uhr, HS IV

Aufgabe 1.1. (10 Punkte)

(i) Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\frac{5+i}{7+i}, \qquad 1 + i + i^2 + \cdots + i^{2013}$$

(ii) Skizziere die Menge

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \,\middle|\, \operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) < 0 \right\}.$$

Aufgabe 1.2. (10 Punkte)
Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto z^2.$$

(i) Bestimme $\operatorname{Re}(f(z))$ und $\operatorname{Im}(f(z))$ für $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = 15 + 8i$.

(iii) Bestimme und skizziere für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ das Bild und das Urbild der Geraden

$$V_{x_0} = \{x_0 + iy \,|\, y \in \mathbb{R}\}, \qquad H_{y_0} = \{x + iy_0 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$$

unter der Abbildung f.

Aufgabe 1.3. (10 Punkte)

(i) Zeige, dass eine Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann $\mathbb{R}$-linear ist, wenn es Konstanten $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gibt, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$A(z) = \lambda z + \mu \overline{z}$$

(ii) Zeige, dass eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann $\mathbb{C}$-linear ist, wenn $\mu = 0$ für die Konstante μ aus (i) gilt.

(iii) Zeige, dass eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann bijektiv ist, wenn $\lambda\overline{\lambda} \neq \mu\overline{\mu}$ für die Konstanten aus (i) gilt und folgere, dass eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entweder ein Isomorphismus oder die Nullabbildung ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 1.4. (10 Bonuspunkte)
Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sei eine Verknüpfung $\cdot$ gegeben, so dass $\mathbb{R}^n$ zusammen mit der Addition $+$ von Vektoren und $\cdot$ als Multiplikation ein Körper ist, welcher den Körper der reellen Zahlen in der Form $\mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{R}^n$ umfasst.
Zeige, dass dann $n \in \{1, 2\}$ gelten muss und der vorgelegte Körper entweder den reellen oder den komplexen Zahlen entspricht.

Hinweis: Zeige zunächst, dass es zu jedem Element $w \in \mathbb{R}^n$ mit $w \neq 0$ ein Polynom $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ mit $P(w) = 0$ gibt und folgere mit dem Fundamentalsatz der Algebra, dass es für $n > 1$ im vorgelegten Körper ein Element u mit $u^2 = -1$ gibt, d.h. dass der vorgelegte Körper ein Modell der komplexen Zahlen enthält.