Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2013

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 10 –

Abgabe: Dienstag, den 02.07.2013, 12:00 – 12:10 Uhr, HS IV

Aufgabe 10.1. (10 Punkte)

(i) Es sei
$$N := \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{C}.$$
Beweise oder widerlege: Es gibt in $\mathcal{O}(B_2(0))$ sowie in $\mathcal{O}(B_1(1))$ jeweils eine holomorphe Funktion, welche nicht konstant ist und N als Menge ihrer Nullstellen besitzt.

(ii) Es sei f eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, welches symmetrisch bezüglich der reellen Achse ist:
$$\{\overline{z} \mid z \in G\} = G$$
Ferner sei mit $G_{\mathbb{R}} := G \cap \mathbb{R}$ vorausgesetzt, dass die Menge aller $z \in G_{\mathbb{R}}$ mit $f(z) \in \mathbb{R}$ einen Häufungspunkt in G besitzt. Zeige, dass dann f auf $G_{\mathbb{R}}$ überhaupt nur reelle Werte annimmt.

Aufgabe 10.2. (10 Punkte)

Die holomorphe Abbildung $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ besitze in $0 \in \mathbb{D}$ eine Nullstelle der Ordnung $n \geqslant 1$. Zeige, dass dann
$$|f(z)| \leqslant |z|^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}, \text{ sowie } \quad |f^{(n)}(0)| \leqslant n!$$
gilt. Zeige ferner: Gibt es einen Punkt $c \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $|f(c)| = |c|^n$ oder gilt $|f^{(n)}(0)| = n!$, dann gibt es ein $\lambda \in S^1$ mit $f(z) = \lambda z^n$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Aufgabe 10.3. (10 Punkte)

(i) Berechne die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}\left(\mathbb{D} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}\right)$.

Hinweis: Gehe von einem Automorphismus f aus, setze diesen geeignet zu einem Automorphismus F von $\mathbb{D}$ fort und untersuche das Verhalten von F in den Punkten 0, $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$.

(ii) Es seien $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ und $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ zwei biholomorphe Abbildungen, so dass in einem Punkt $p \in \mathbb{D}$
$$f(p) = g(p) \quad \text{sowie} \quad f'(p) = g'(p)$$
gilt. Zeige, dass dann bereits $f = g$ gelten muss.