Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2013

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 11 –

Abgabe: Dienstag, den 09.07.2013, 12:00 – 12:10 Uhr, HS IV

Aufgabe 11.1. (10 Punkte)
Bestimme zu den folgenden Funktionen jeweils die isolierten Singularitäten und deren Art. Gib im Fall einer hebbaren Singularität die holomorphe Fortsetzung und im Falle eines Pols die Ordnung an.

(i) $f_1(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$ (ii) $f_2(z) = \dfrac{\cos(z)}{z}$

(iii) $f_3(z) = \dfrac{\log(1+z)}{z^2}$ (iv) $f_4(z) = \exp\left(\dfrac{1}{\sin(z)}\right)$

Dabei sei mit log der Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet.

Aufgabe 11.2. (10 Punkte)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $p \in G$ ein Punkt.

(i) Die holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit $f \neq 0$ besitze in p eine Nullstelle der Ordnung $m \geqslant 1$. Zeige, dass dann $\frac{1}{f}$ auf einer offenen Umgebung um den Punkt p wohldefiniert ist und im Punkt p einen Pol der Ordnung m besitzt.

(ii) Die holomorphe Funktion $f : G \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ besitze im Punkt p einen Pol der Ordnung $m \geqslant 1$. Zeige, dass dann $\frac{1}{f}$ auf einer offenen Umgebung um den Punkt p wohldefiniert ist und im Punkt p eine hebbare Singularität besitzt, so dass die holomorphe Fortsetzung von $\frac{1}{f}$ eine Nullstelle der Ordnung m in p besitzt.

(iii) Zeige anhand eines Beispiels, dass folgende Aussage im Allgemeinen falsch ist:

Eine holomorphe Funktion $f : G \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ hat genau dann eine wesentliche Singularität im Punkt p, wenn auch die Funktion $\frac{1}{f}$ auf einer offenen Umgebung um p wohldefiniert ist und eine wesentliche Singularität im Punkt p besitzt.

Gib ferner eine zusätzliche Voraussetzung für holomorphe Funktionen $f : G \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ an, unter der die Aussage richtig wird und beweise dies.

Hinweis: Untersuche $z \mapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

Aufgabe 11.3. (10 Punkte)
Sei

$$f : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion, welche in 0 keine wesentliche Singularität besitzt. Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $f(2^{-k})$ reell. Zeige, dass dann f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nur reelle Werte annimmt. Stimmt das auch, falls f in 0 eine wesentliche Singularität besitzt?