Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2013

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 12 –

Abgabe: Dienstag, den 16.07.2013, 12:00 – 12:10 Uhr, HS IV

Aufgabe 12.1. (10 Punkte)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $p \in G$ ein Punkt und $f : G \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Beweise oder widerlege in Abhängigkeit vom Typ der isolierten Singularität von f in p die folgende Aussage:

Für alle $r > 0$ mit $\overline{B_r(p)} \subset G$ gilt die Ungleichung

$$\sup_{B_r(p)\setminus\{p\}} |\exp \circ f| \leqslant \sup_{\partial B_r(p)} |\exp \circ f| \,.$$

Aufgabe 12.2. (10 Punkte)
Seien f und g zwei von Null verschiedene Nichteinheiten im Ring $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ der ganzen Funktionen. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Funktionen f und g sind teilerfremd in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

(ii) Die Funktionen f und g besitzen keine gemeinsame Nullstelle.

(iii) Es gibt Elemente $a, b \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ so dass die Gleichung

$$af + bg = 1$$

in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ gilt.

Bemerkungen: Ist R ein Ring, dann nennt man die multiplikativ invertierbaren Elemente *Einheiten*. Ferner nennt man ein Element $x \in R$ einen *Teiler* von $y \in R$, falls es ein $c \in R$ mit $cx = y$ gibt, in Zeichen $x \mid y$. Schließlich heißen zwei Elemente $x, y \in R$ *teilerfremd*, falls sie keinen nichttrivialen gemeinsamen Teiler besitzen, d.h. falls aus $z \mid x$ und $z \mid y$ bereits folgt, dass $z \in R$ eine Einheit ist.

Aufgabe 12.3. (10 Punkte)
Bestimme die Laurent-Entwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{z^2 - 6}{z^2 + 5z + 6}$$

auf den folgenden Gebieten:

(i) $B_2(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$

(ii) $B_{2,3}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3\}$

(iii) $B_{3,\infty}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 3 < |z|\}$