Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2013

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 2 –

Abgabe: Dienstag, den 07.05.2013, 12:00 – 12:10 Uhr, HS IV

Aufgabe 2.1. (10 Punkte)

(i) Seien reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. In welchen Punkten $z = x + iy$ ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x+iy) = (ax^2 - y) + i(x + by^2)$$

komplex differenzierbar? Gibt es eine Menge $D \subset \mathbb{C}$, so dass f auf D holomorph ist?

(ii) Sei $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u(x+iy) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y.$$

Berechne die Menge aller Funktionen $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, so dass $u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist.

Aufgabe 2.2. (10 Punkte)
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f = u + iv : G \to \mathbb{C}$ holomorph in G.

(i) Zeige, dass für eine beliebige Funktion $\hat{v} : G \to \mathbb{R}$ die Funktion $u + i\hat{v} : G \to \mathbb{C}$ genau dann holomorph ist, wenn $v - \hat{v}$ in G konstant ist.

(ii) Zeige: Ist die Funktion $u^2 + iv^2 : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $f' : G \to \mathbb{C}$ stetig, dann ist f konstant.

Bemerkung: Wir werden später in der Vorlesung beweisen, dass f' für holomorphe Funktionen f immer stetig ist – auf diese Voraussetzung könnte also verzichtet werden.

Aufgabe 2.3. (10 Punkte)
Seien $D, D' \subset \mathbb{C}$ nichtleere, offene Mengen und $f : D \to D'$ sowie $g : D' \to \mathbb{C}$ Funktionen, so dass f in $p \in D$ sowie g in $f(p) \in D'$ (reell) total differenzierbar sind. Beweise *mit Aufgabe 1.3.* die Kettenregeln des Wirtinger-Kalküls:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(p) = \frac{\partial g}{\partial w}(f(p))\frac{\partial f}{\partial z}(p) + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(f(p))\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(p)$$
$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \overline{z}}(p) = \frac{\partial g}{\partial w}(f(p))\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(p) + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(f(p))\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(p)$$

Dabei bezeichnet z die Variable in D und w die Variable in D'.