Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2013

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 3 –

Abgabe: Dienstag, den 14.05.2013, 12:00 – 12:10 Uhr, HS IV

Aufgabe 3.1. (10 Punkte)
Sei $d \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Polynomen $P_n \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad $\leqslant d$ mit

$$P_n(z) = a_{n,0} + a_{n,1}z + \cdots + a_{n,d}z^d.$$

Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig.

(ii) Es gibt $d+1$ paarweise verschiedene Punkte $c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{C}$, so dass die Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf der Menge $\{c_0, \ldots, c_d\}$ punktweise konvergiert.

(iii) Für alle $0 \leqslant j \leqslant d$ konvergiert die Folge $(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ der Koeffizienten.

Aufgabe 3.2. (10 Punkte)
Bestimme die größtmögliche offene Menge $D \subset \mathbb{C}$ auf der die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 - z^2}$$

normal konvergiert.

Aufgabe 3.3. (10 Punkte)
Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto \frac{1}{z^2+1}$$

um jeden Punkt $p \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden kann und berechne für alle diese Punkte den jeweiligen Konvergenzradius. Erläutere, inwiefern man diesen Konvergenzradius anschaulich verstehen kann.

Hinweis: Führe zunächst eine Partialbruchzerlegung durch.