Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2013

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 4 –

Abgabe: Dienstag, den 21.05.2013, 12:00 – 12:10 Uhr, HS IV

Aufgabe 4.1. (10 Punkte)

(i) Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, z^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{n^2} z^n$ mit festem $s \in \mathbb{R}$

(ii) Die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ habe den Konvergenzradius $R > 0$. Zeige: Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\, z^n$$

hat den Konvergenzradius ∞.

Aufgabe 4.2. (10 Punkte)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein unbeschränktes Gebiet und die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

konvergiere gleichmäßig auf ganz G gegen die Grenzfunktion $f : G \to \mathbb{C}$. Zeige, dass f ein Polynom ist.

Aufgabe 4.3. (10 Punkte)
Betrachte die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$. Zeige:

(i) Die Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1.

(ii) Die holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ist in keinem Punkt $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ holomorph fortsetzbar.

Hinweis: Zeige zunächst: Für jedes $\alpha \in \mathbb{Q}$ gilt $|f(r \exp(2\pi i \alpha)| \to \infty$ für $r \to 1$.

Dabei heißt die holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ in einem Punkt $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ holomorph fortsetzbar, wenn es für $\varepsilon > 0$ eine holomorphe Funktion $g : B_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ auf der Kreisscheibe $B_\varepsilon(z_0)$ gibt, so dass $f|_{B_\varepsilon(z_0)\cap\mathbb{D}} = g|_{B_\varepsilon(z_0)\cap\mathbb{D}}$ gilt.