Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2013

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 5 –

Abgabe: Dienstag, den 28.05.2013, 12:00 – 12:10 Uhr, HS IV

Aufgabe 5.1. (10 Punkte)
Es bezeichne

$$\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \leqslant 0,\, \mathrm{Im}(z) = 0\}$$

die längs der negativen reellen Achse geschlitzte Ebene und $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ die offene Einheitskreisscheibe.

(i) Konstruiere eine biholomorphe Abbildung

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D},$$

welche fixpunktfrei ist, d.h. mit $f(z) \neq z$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

(ii) Konstruiere eine biholomorphe Abbildung

$$g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^-.$$

Hinweis: Verwende $z \mapsto -z^2$ auf geeignete Weise.

Aufgabe 5.2. (10 Punkte)

(i) Bestimme und skizziere für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ die Bilder der Geraden

$$V_{x_0} = \{x_0 + iy \,|\, y \in \mathbb{R}\}, \qquad H_{y_0} = \{x + iy_0 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$$

unter der Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$.

(ii) Berechne für jeden Punkt $p \in \mathbb{C}^\times$ den Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} \exp(tp)$$

der Exponentialfunktion für Werte, die auf der Geraden durch 0 und p gegen ∞ streben, sofern dieser existiert.

Aufgabe 5.3. (10 Punkte)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \notin G$. Eine holomorphe Funktion $\ell : G \to \mathbb{C}$ heißt *Logarithmusfunktion* auf G, falls $\exp(\ell(z)) = z$ für alle $z \in G$ gilt. Entsprechend heißt für $n \in \mathbb{N}$ eine holomorphe Funktion $w : G \to \mathbb{C}$ eine *n-te Wurzelfunktion* auf G, falls $w(z)^n = z$ für alle $z \in G$ gilt.

(i) Zeige: Gibt es auf G eine Logarithmusfunktion ℓ, dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ auf G auch eine n-te Wurzelfunktion.

(ii) Zeige: Ist $f : S^1 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, wobei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ die Einheitskreislinie bezeichne, dann gibt es einen Punkt $z \in S^1$ so dass $f(z) = f(-z)$ gilt.

(iii) Zeige mit Hilfe von (ii), dass es auf $\mathbb{C}^\times$ keine 2-te Wurzelfunktion gibt und folgere, dass es auf $\mathbb{C}^\times$ keine Logarithmusfunktion gibt.

Hinweis: Berechne zunächst für $x + iy \in \mathbb{C}$ die Menge $\{p \in \mathbb{C} \,|\, p^2 = x + iy\}$ aller Quadratwurzeln von $x + iy$ explizit.