Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2013

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 7 –

Abgabe: Dienstag, den 11.06.2013, 12:00 – 12:10 Uhr, HS IV

Aufgabe 7.1. (10 Punkte)

(i) Gegeben seien zwei Wege $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Definiere einen *zusammengesetzten* Weg $\gamma_1 + \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ und zeige, dass für integrierbare Funktionen f gilt:

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

(ii) Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg. Definiere den *umgekehrt durchlaufenen* Weg $-\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ und zeige, dass für integrierbare Funktionen f gilt:

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz$$

(iii) Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $g : [c,d] \to [a,b]$ eine bijektive und stetig differenzierbare Funktion mit $g(c) = a$ und $g(d) = b$. Zeige, dass für den Weg $\gamma \circ g : [c,d] \to \mathbb{C}$ und jede integrierbare Funktion f gilt:

$$\int_{\gamma\circ g} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz$$

Aufgabe 7.2. (10 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ mit $D \neq \emptyset$ eine offene Menge, $p \in D$ ein Punkt und

$$f : D \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion. Ferner sei $\Delta \subset D$ ein abgeschlossenes Dreieck mit $p \in \Delta^\circ$ und $B \subset D$ eine abgeschlossene Kreisscheibe mit $p \in B^\circ$. Zeige, dass

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial B} f(z)\,dz$$

gilt, wobei die Ränder jeweils in positiver Drehrichtung durchlaufen werden.

Aufgabe 7.3. (10 Punkte)

(i) Berechne die Integrale

$$\int_{\partial B_1(1)} \frac{1}{z^2-1}\,dz, \qquad \int_{\partial B_1(-1)} \frac{1}{z^2-1}\,dz$$

wobei die Ränder der Kreisscheiben in positiver Drehrichtung durchlaufen werden.

(ii) Berechne für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ das Integral

$$\int_0^{2\pi} (\cos(t))^{2n}\,dt.$$