Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2013

**Übungen zur Funktionentheorie I**

– Blatt 8 –

Abgabe: Dienstag, den 18.06.2013, 12:00 – 12:10 Uhr, HS IV

**Aufgabe 8.1. (10 Punkte)**

(i) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Ferner sei eine stetig partiell differenzierbare Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow U, \quad (s,t) \longmapsto H(s,t) =: \gamma_s(t)$$

gegeben. Zeige, dass folgende Abbildung stetig ist:

$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad s \longmapsto \int_{\gamma_s} f(z)\, dz$$

(ii) Zeige: Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ holomorph ist, dann muss $f$ bereits auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph sein.

**Aufgabe 8.2. (10 Punkte)**
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Bezüglich eines Punktes $p \in G$ gelte: Ist $z \in G$ ein Punkt, so dass auch $-z + 2p \in G$ gilt, dann ist stets

$$f(z) = f(-z + 2p).$$

Zeige, dass alle ungeraden Ableitungen von $f$ eine Nullstelle im Punkt $p$ besitzen.

**Aufgabe 8.3. (10 Punkte)**
Es seien positive reelle Zahlen $a_n > 0$ gegeben, so dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

den Konvergenzradius $R > 0$ besitzt. Zeige, dass die durch

$$f : B_R(0) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

definierte holomorphe Funktion im Punkt $R \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ nicht holomorph fortsetzbar ist.

*Hinweis:* Wende den Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor im Punkt $R/2$ an.