Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2013

Übungen zur Funktionentheorie I

– Blatt 9 –

Abgabe: Dienstag, den 25.06.2013, 12:00 – 12:10 Uhr, HS IV

Aufgabe 9.1. (10 Punkte)

(i) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, welche nicht konstant ist. Zeige, dass jede komplexe Zahl beliebig genau durch die Werte von f approximiert werden kann, d.h. dass für jede beliebige komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $z \in \mathbb{C}$ existiert, so dass
$$|w - f(z)| < \varepsilon$$
gilt.

(ii) Es sei $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so dass für eine Konstante $c > 0$
$$\mathrm{Re}(f(z)) \leqslant c \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^\times$$
gilt. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 9.2. (10 Punkte)
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes, regulär offenes Gebiet, $p \in G$ ein Punkt und $B \subset G$ eine abgeschlossene Kreisscheibe mit positivem Radius. Zeige, dass es keine biholomorphe Abbildung
$$f : G \setminus \{p\} \longrightarrow G \setminus B$$
gibt.

Bemerkung: Eine Menge $U \subset \mathbb{C}$ heißt regulär offen, falls $\left(\overline{U}\right)^\circ = U$ gilt.

Aufgabe 9.3. (10 Punkte)

(i) Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und
$$f : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \qquad g : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$
zwei stetige Funktionen, welche auf G holomorph sind. Zeige: Gilt $|f(z)| = |g(z)|$ für alle Punkte $z \in \partial G$, dann existiert eine Zahl $\varphi \in S^1$, so dass $f = \varphi g$ gilt.

(ii) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige: Hat $|f|$ ein lokales Minimum in einem Punkt $p \in G$ mit $f(p) \neq 0$, dann ist f konstant.