Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Dr. Matthias Stemmler

Wintersemester 2010/2011

# Zusatzmaterial zur Funktionentheorie II

– Konvergenzbegriffe und Familien holomorpher Funktionen –

## Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(G)$ eine Folge holomorpher Funktionen auf $G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt ...

- ... *punktweise konvergent* gegen $f$, falls für jedes feste $z \in G$ die Folge $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gegen $f(z)$ konvergiert.
- ... auf $G$ *gleichmäßig konvergent* gegen $f$, falls $||f_n - f||_G := \sup\big\{|f_n(z) - f(z)| : z \in G\big\}$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.
- ... *lokal gleichmäßig konvergent* gegen $f$, falls zu jedem $z_0 \in G$ eine Umgebung $U \subset G$ existiert, so dass $||f_n - f||_U$ gegen 0 konvergiert.
  („gleichmäßige Konvergenz in einer geeigneten Umgebung jedes Punktes“)
- ... *kompakt konvergent* gegen $f$, falls $||f_n - f||_K$ für jedes kompakte $K \subset G$ gegen 0 konvergiert.
  („gleichmäßige Konvergenz auf jedem Kompaktum“)

## Satz

- Für die Konvergenzarten einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(G)$ gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{lokal gleichmäßig}} \arrow[dd, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, bend left] & \\
\boxed{\text{gleichmäßig}} \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, bend right] & & \boxed{\text{punktweise}} \\
 & \boxed{\text{kompakt}} \arrow[ur, Rightarrow, bend right] &
\end{tikzcd}$$

  Die hier nicht eingezeichneten Implikationen sind i. A. falsch.

  *Beispiel:* Auf $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ konvergiert $f_n(z) = z^n$ lokal gleichmäßig/kompakt gegen 0, aber nicht gleichmäßig.

- Holomorphie bleibt unter lokal gleichmäßiger/kompakter (also insbesondere unter gleichmäßiger) Konvergenz erhalten, nicht aber unter punktweiser Konvergenz.

**Definition**

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ eine Familie holomorpher Funktionen auf $G$. Dann heißt $\mathcal{F}$ ...

- ... auf $G$ *beschränkt*, falls ein $c \geqslant 0$ existiert mit $|f(z)| \leqslant c$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $z \in G$.
- ... *lokal beschränkt*, falls zu jedem $z_0 \in G$ eine Umgebung $U \subset G$ und ein $c \geqslant 0$ existieren mit $|f(z)| \leqslant c$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $z \in U$.
- ... *normal*, falls jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ eine lokal gleichmäßig/kompakt konvergente Teilfolge besitzt.

**Bemerkung**

$\mathcal{F}$ ist genau dann lokal beschränkt, wenn zu jedem kompakten $K \subset G$ ein $c \geqslant 0$ existiert mit $|f(z)| \leqslant c$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $z \in K$.

**Satz**

Für eine Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{lokal beschränkt}} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Montel}"] \\
\boxed{\text{beschränkt}} \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[r, Rightarrow, bend right] & \boxed{\text{normal}}
\end{tikzcd}$$

Die hier nicht eingezeichneten Implikationen sind i. A. falsch.

*Beispiel:* Auf $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist $\mathcal{F} = \{z \mapsto nz^n : n \in \mathbb{N}\}$ lokal beschränkt/normal, aber nicht beschränkt.

Insbesondere besitzt jede lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen eine kompakt konvergente Teilfolge, muss aber insgesamt nicht kompakt konvergent sein. Bei der Überprüfung der kompakten Konvergenz helfen die folgenden Kriterien.

**Konvergenzkriterien**

- Eine lokal beschränkte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(G)$ ist genau dann kompakt konvergent, wenn alle kompakt konvergenten Teilfolgen (mindestens eine solche existiert nach Montel) gegen denselben Grenzwert konvergieren.
- Satz von Vitali: Eine lokal beschränkte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(G)$, die auf einer Menge mit Häufungspunkt in $G$ punktweise konvergiert, ist kompakt konvergent.