Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Dr. Matthias Stemmler

Wintersemester 2010/2011

Zusatzmaterial zur Funktionentheorie II

– Charakterisierung von Holomorphiegebieten –

Satz

Für ein eigentliches Reinhardt-Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ sind die folgenden Aussagen (i)–(vi) äquivalent.
Für ein beliebiges Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ sind die Aussagen (i), (ii), (iv) und (vi) äquivalent.

<u>(a) (Nicht-)Fortsetzbarkeitseigenschaften</u>

(i) G ist ein Holomorphiegebiet
d. h. es existiert eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$, die sich in keinen Randpunkt von G holomorph fortsetzen lässt.

(ii) G ist ein schwaches Holomorphiegebiet
d. h. zu jedem Randpunkt p von G existiert eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ (evtl. abhängig von p), die sich in p nicht holomorph fortsetzen lässt.

(iii) G ist der Konvergenzbereich einer Potenzreihe
d. h. es existiert eine Potenzreihe $f(z)$ in n Variablen, so dass $G = \big\{z \in \mathbb{C}^n : f(z) \text{ konvergiert}\big\}^\circ$ (das Innere der Menge der Punkte, in denen die Reihe konvergiert).

<u>(b) Konvexitätseigenschaften</u>

(iv) G ist holomorph-konvex
d. h. für jedes Kompaktum $K \subset G$ ist die holomorph-konvexe Hülle $\widehat{K}_G$ kompakt.

(v) G ist logarithmisch konvex
d. h. $\log(\tau(G) \cap \mathbb{R}^n_{>0})$ ist konvex.

(vi) G ist pseudokonvex
d. h. $-\log \circ \delta_G$ ist plurisubharmonisch, wobei $\delta_G : G \to \mathbb{R}_{>0}$ die Randabstandsfunktion von G ist.

zum Beweis

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iv):	Satz (4.4)
(v) $\Longleftrightarrow$ (iv) $\Longleftrightarrow$ (i) $\Longleftrightarrow$ (iii):	Satz (4.12)
(i) $\Longrightarrow$ (vi):	Satz (5.6)
(vi) $\Longrightarrow$ (i):	Lösung (Oka et al., 1954) des Levi-Problems (E. E. Levi, 1911)

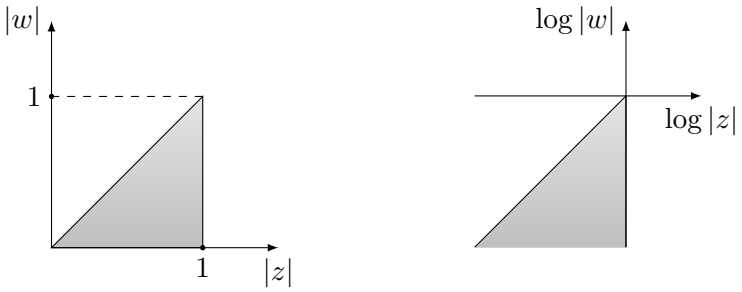
Wichtige Fälle von Holomorphiegebieten

- Jedes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist ein Holomorphiegebiet. Gebiete, die keine Holomorphiegebiete sind, sind also ein mehrdimensionales Phänomen, vgl. auch die mehrdimensionalen Hebbarkeitssätze.
- Für Holomorphiegebiete $G \subset \mathbb{C}^n$ und $H \subset \mathbb{C}^m$ ist auch $G \times H \subset \mathbb{C}^{n+m}$ ein Holomorphiegebiet.
- Jedes konvexe Gebiet in $\mathbb{C}^n$ ist ein Holomorphiegebiet.
- Insbesondere ist jeder Polyzylinder und jede Kugel (bzgl. einer beliebigen Norm) in $\mathbb{C}^n$ ein Holomorphiegebiet.

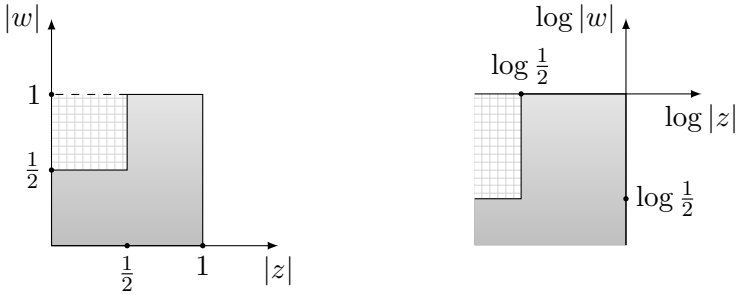
Einige Beispiele

Wir betrachten zu einigen Gebieten $G \subset \mathbb{C}^2$ jeweils das Betragsbild (links) und das logarithmische Betragsbild (rechts). Die graue Fläche zeigt jeweils das Gebiet G. Ist G kein Holomorphiegebiet, so markiert die karierte Fläche den Bereich, in den jedes $f \in \mathcal{O}(G)$ holomorph fortsetzbar ist.

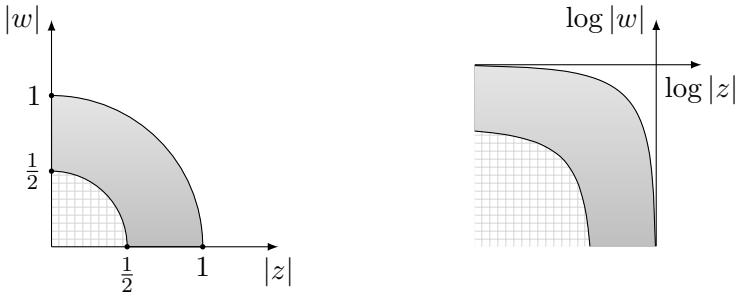
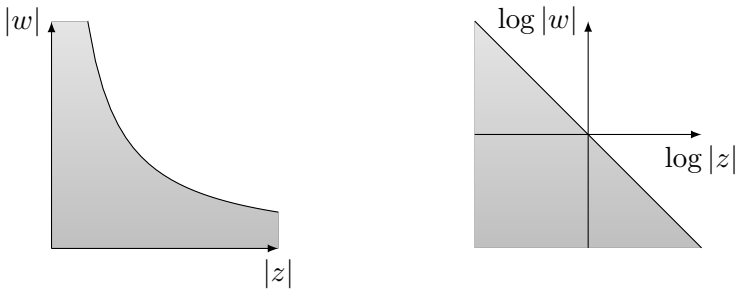
- $G = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |w| < |z| < 1\}$ (*Hartogs-Dreieck*)
  Holomorphiegebiet (z. B. (ii))



- $G = \{(z,w) \in D^2 : |z| > \frac{1}{2} \text{ oder } |w| < \frac{1}{2}\}$ (*Hartogs-Figur*)
  kein Holomorphiegebiet (z. B. Fortsetzbarkeit auf die vollkommene Hülle oder (v))



- $G = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \frac{1}{2} < ||(z,w)||_2 < 1\}$
  kein Holomorphiegebiet (z. B. Kugelsatz)



- $G = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z| \cdot |w| < 1\}$
  Holomorphiegebiet (z. B. (iii) oder (v))