Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Georg Schumacher
Dr. Matthias Stemmler

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Funktionentheorie II

– Blatt 1 –

Abgabe: Montag, den 01.11.2010, 12:25 Uhr, LE SR IV

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Zeige, dass die Aussage des Satzes von Montel für reell-analytische Funktionen i. A. falsch ist. Genauer:
Finde ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine lokal beschränkte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reell-analytischer Funktionen auf I, so dass keine Teilfolge $(f_{n(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig konvergiert.

b) Finde ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und eine lokal beschränkte Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ beschränkter holomorpher Funktionen auf G, so dass $\mathcal{F}$ nicht beschränkt ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf G. In einem Punkt $z_0 \in G$ konvergiere für jedes $k \geqslant 0$ die Folge $(f_n^{(k)}(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$ der k-ten Ableitungen. Zeige, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann kompakt konvergiert.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe, $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $a \in G$. Zeige, dass genau eine biholomorphe Abbildung $f : G \to \mathbb{D}$ existiert mit

$$f(a) = 0 \quad \text{und} \quad f'(a) \in \mathbb{R},\ f'(a) > 0.$$

Hinweis: Verwende für die Eindeutigkeit das Schwarzsche Lemma.

b) Bestimme die Abbildung f aus a) explizit für $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 0\}$ und $a = 1$.

Hinweis: Verwende eine holomorphe Wurzelfunktion (Existenz?) und eine Cayley-Abbildung.