Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Georg Schumacher
Dr. Matthias Stemmler

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Funktionentheorie II

– Blatt 2 –

Abgabe: Montag, den 08.11.2010, 12:25 Uhr, LE SR IV

Vorbemerkungen

- Nach Vorlesung hat jedes (homologisch) einfach zusammenhängende Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ die *Quadratwurzeleigenschaft*, d. h. zu jedem $g \in \mathcal{O}(G)$ ohne Nullstelle existiert ein $h \in \mathcal{O}(G)$ mit $h(z)^2 = g(z)$ für alle $z \in G$. Ein Gebiet mit dieser Eigenschaft heißt auch *Q-Gebiet*.
- Ein Q-Gebiet G heißt *Koebe-Gebiet*, falls $G \subsetneq \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
- Eine Dehnung κ eines Koebe-Gebiets G mit $0 \in G$ heißt *zulässig*, falls das Bild $\kappa(G)$ wieder ein Koebe-Gebiet ist.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Seien $G, G' \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f : G \to G'$ eine biholomorphe Abbildung. Zeige: Ist G ein Q-Gebiet, so ist auch G' ein Q-Gebiet.

b) Sei G ein Koebe-Gebiet mit $0 \in G$. Folgere aus a): Jede Dehnung $\kappa : G \to \mathbb{D}$ mit $\kappa(G) \neq \mathbb{D}$ ist zulässig.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für $b \in \mathbb{D}$ bezeichne g_b den Automorphismus

$$g_b : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}, \quad z \longmapsto \frac{z-b}{\overline{b}z-1}.$$

Sei nun G ein Koebe-Gebiet mit $0 \in G$ und $c \in \mathbb{D}$ mit $c^2 \notin G$. Sei $v \in \mathcal{O}(G)$ die holomorphe Quadratwurzel aus $g_{c^2}|_G$ mit $v(0) = c$. Sei $\vartheta : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine Drehung um 0. Zeige, dass $\kappa := \vartheta \circ g_c \circ v$ eine zulässige Dehnung von G ist.

bitte wenden

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \longmapsto \frac{1}{z}$$

heißt *Inversion*.

a) Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_2 \neq 0$ ist

$$\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \lambda \longmapsto z_1 + \lambda z_2$$

die Parametrisierung einer Geraden $\rho(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$. Zeige: Ist $0 \notin \rho(\mathbb{R})$, so ist die Inversion $f(\rho(\mathbb{R}))$ dieser Geraden ein in 0 punktierter Kreis.

b) Seien $z_1, \ldots, z_4 \in \mathbb{C}$ mit $z_2, z_4 \neq 0$ und $z_1 + \lambda z_2 \neq 0$, $z_3 + \lambda z_4 \neq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass mit

$$\omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \lambda \longmapsto \frac{z_1 + \lambda z_2}{z_3 + \lambda z_4}$$

die Menge $\omega(\mathbb{R})$ ein Punkt oder ein punktierter Kreis ist. Welche Gestalt hat die Inversion $f(\omega(\mathbb{R}))$?