Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Georg Schumacher
Dr. Matthias Stemmler

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Funktionentheorie II

– Blatt 5 –

Abgabe: Montag, den 29.11.2010, 14:00 Uhr, LE SR IV

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Welche der folgenden Gebiete sind Reinhardt-Gebiete?

i) $G_1 := \{z \in \mathbb{C}^2 : (|z_1| - 1)^2 + (|z_2| - 1)^2 < 1\}$,

ii) $G_2 := \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1 - 1|^2 + |z_2 - 1|^2 < 1\}$.

b) Bestimme das größte Reinhardt-Gebiet G, das in der Menge

$$M := \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1 + z_2| < 1\}$$

enthalten ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $L \subset \mathbb{C}^3$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \sin(z_1 + z_2) - z_3 z_2^2 &= 0, \\ \exp(z_1) - \exp(z_2) &= z_3. \end{aligned}$$

Zeige mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen: Es existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von 0 und eine holomorphe Abbildung $\varphi : U \to L$ mit $\varphi(0) = (0, 0, 0)$, so dass $\varphi : U \to \varphi(U)$ ein Homöomorphismus ist.

bitte wenden

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$, $Y := N(F)$ die Nullstellenmenge von F und $X := \left\{z \in Y : \frac{\partial F}{\partial z_2}(z) \neq 0\right\}$. Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{pr}_k : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z = (z_1, z_2) \longmapsto z_k,$$

die Projektion auf die k-te Koordinate, $k = 1, 2$.

a) Zeige, dass X in Y offen ist.

b) Zeige, dass zu jedem $a \in X$ eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{C}^2$ von a existiert, so dass

$$\mathrm{pr}_1|_{X \cap W} : X \cap W \longrightarrow \mathrm{pr}_1(X \cap W)$$

ein Homöomorphismus ist.

c) Bestimme Y und X explizit für

$$F(z_1, z_2) := z_1 - \exp(z_2)$$

und zeige die folgenden Aussagen.

i) X bildet mit der Verknüpfung

$$(z_1, z_2) \cdot (w_1, w_2) := (z_1 w_1, z_2 + w_2)$$

eine abelsche Gruppe.

ii) Die Abbildung

$$\mathrm{Log} := \mathrm{pr}_2|_X : X \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist holomorph[1] und erfüllt die Funktionalgleichung $\mathrm{Log}(z \cdot w) = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w)$ für alle $z, w \in X$.

iii) Mit

$$\mathrm{Exp} : \mathbb{C} \longrightarrow X, \quad t \longmapsto (\exp(t), t)$$

gilt $\mathrm{Exp} \circ \mathrm{Log} = \mathrm{id}_X$ und $\mathrm{Log} \circ \mathrm{Exp} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

Bemerkung: X heißt *Riemannsche Fläche des Logarithmus.*

[1] Für eine (nicht notwendigerweise offene) Teilmenge $X \subset \mathbb{C}^n$ heißt eine Abbildung $f : X \to \mathbb{C}^m$ *holomorph*, wenn zu jedem $a \in X$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ von a und eine holomorphe Abbildung $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}^m$ existieren mit $\tilde{f}|_{X \cap U} = f|_{X \cap U}$.