Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Georg Schumacher
Dr. Matthias Stemmler

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Funktionentheorie II

– Blatt 6 –

Abgabe: Montag, den 06.12.2010, 14:00 Uhr, LE SR IV

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ heißt *Kreisgebiet*, falls $e^{i\theta} z \in G$ für alle $z \in G$ und $\theta \in \mathbb{R}$.

Seien $G, H \subset \mathbb{C}^n$ beschränkte Kreisgebiete mit $0 \in G$ und $0 \in H$ und $f : G \to H$ eine biholomorphe Abbildung mit $f(0) = 0$. Zeige: f ist linear, d. h. es gibt eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $f(z) = Az$ für alle $z \in G$.

Hinweis: Zeige zunächst mit dem Cartanschen Eindeutigkeitssatz, dass $f(e^{i\theta} z) = e^{i\theta} f(z)$ für alle $z \in G$ und $\theta \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Entscheide jeweils, ob A in X analytisch ist.

a) $X = \mathbb{C}^n$, $A = S^{2n-1} := \left\{ z \in \mathbb{C}^n : ||z||_2 = 1 \right\}$

b) $X = \mathbb{C}^{n \times n} \cong \mathbb{C}^{n^2}$, $A = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

c) $X = \mathbb{C}^{n \times n} \cong \mathbb{C}^{n^2}$, $A = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$

d) $X = \mathbb{C}^n$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}^n$ diskret

Entscheide im Fall einer analytischen Menge zusätzlich, ob A die Nullstellenmenge eines $f \in \mathcal{O}(X)$ ist. (Beachte dazu Aufgabe 3.)

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $n \geqslant 2$, $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(G)$ und $A := N(f)$ die Nullstellenmenge von f. Zeige:

a) A hat keine isolierten Punkte, d. h. für jedes $a \in A$ und jede Umgebung $U \subset G$ von a ist $A \cap U$ unendlich.

   Hinweis: Verwende, dass sich für Gebiete $G' \subset \mathbb{C}^n$ mit $n \geqslant 2$ und $a \in G'$ jedes $g \in \mathcal{O}(G' \setminus \{a\})$ zu einem $\tilde{g} \in \mathcal{O}(G')$ fortsetzen lässt.

b) Ist $f \not\equiv 0$, so gilt $\dim_a A = n - 1$ für alle $a \in A$. Dabei sei

$$\dim_a A := n - \max \left\{ \dim_{\mathbb{C}} E : E \subset \mathbb{C}^n \text{ affiner Unterraum, } a \in E \cap A \text{ isoliert} \right\}$$

   die Dimension der analytischen Menge A im Punkt a.