Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Georg Schumacher
Dr. Matthias Stemmler

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Funktionentheorie II

– Blatt 7 –

Abgabe: Montag, den 13.12.2010, 14:00 Uhr, LE SR IV

Satz (Kugelsatz von Hartogs, darf ohne Beweis benutzt werden)

Sei $n \geqslant 2$, $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $K \subset G$ kompakt, so dass $G \setminus K$ zusammenhängend ist. Dann lässt sich jedes $f \in \mathcal{O}(G \setminus K)$ (eindeutig) zu einem $\tilde{f} \in \mathcal{O}(G)$ fortsetzen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Seien $X \subset \mathbb{C}^n$ und $Y \subset \mathbb{C}^m$ offen und $f : X \to Y$ holomorph. Zeige: Ist $B \subset Y$ analytisch, so ist auch $A := f^{-1}(B) \subset X$ analytisch.

b) Betrachte die holomorphe Abbildung

$$f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \quad (z, w) \longmapsto (z, zw).$$

Finde eine analytische Menge $A \subset \mathbb{C}^2$, so dass $f(A) \subset \mathbb{C}^2$ nicht analytisch ist, und zeige dies direkt mit der Definition einer analytischen Menge.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein eigentliches Reinhardt-Gebiet, $\widehat{G}$ seine vollkommene Hülle und $f \in \mathcal{O}(\widehat{G})$. Zeige, dass $f(\widehat{G}) = f(G)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Sei $\Omega := \left\{z \in \mathbb{C}^2 : 1 < ||z||_2 < 2\right\}$, $X := \Omega \cap (\mathbb{C} \times \{0\})$ und

$$f : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\zeta, 0) \longmapsto \frac{1}{\zeta - 1}.$$

Existiert ein $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $F|_X = f$?

b) Sei $n \geqslant 2$, $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(G)$ und $\emptyset \neq N(f)$ die Nullstellenmenge von f. Zeige, dass $N(f)$ nicht kompakt ist.