Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Georg Schumacher
Dr. Matthias Stemmler

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Funktionentheorie II

– Blatt 8 –

Abgabe: Montag, den 20.12.2010, 14:00 Uhr, LE SR IV

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $K \subset L \subset U \subset V \subset \mathbb{C}^n$ Teilmengen, so dass U und V offen sind. Zeige:

a) $\widehat{K}_U \subset \widehat{L}_U$

b) $\widehat{K}_U \subset \widehat{K}_V$

c) $\widehat{(\widehat{K}_U)}_U = \widehat{K}_U$

Sei jetzt $H \subset D$ eine Hartogsfigur im zugehörigen Polyzylinder $D \subset \mathbb{C}^2$ und $K \subset H$. Zeige:

d) $\widehat{K}_H = \widehat{K}_D \cap H$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Seien $G \subset \mathbb{C}^n$ und $H \subset \mathbb{C}^m$ Gebiete und $f : G \to H$ eine holomorphe und eigentliche Abbildung. Zeige:

a) Ist H ein Holomorphiegebiet, so auch G.

b) Ist f sogar biholomorph, so gilt auch die Umkehrung von a).

c) Das Gebiet $S := \big\{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Im}(z_n) > ||z'||_2^2\big\}$, $n \geqslant 2$, ist ein Holomorphiegebiet.

Hinweis: Betrachte die *Cayley-Abbildung*

$$c : B^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad (z', z_n) \longmapsto \frac{1}{1+z_n}\,\big(z', i(1-z_n)\big),$$

wobei $B^n := \big\{z \in \mathbb{C}^n : ||z||_2 < 1\big\}$.

Bemerkung: S heißt *Siegelsche obere Halbebene*.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $G := \big\{z \in \mathbb{C}^n : 1 < ||z||_2 < 3\big\}$ und $K := \big\{z \in \mathbb{C}^n : ||z||_2 = 2\big\}$. Zeige:

$$\widehat{K}_G = \begin{cases} K & \text{, falls } n = 1, \\ G \cap \overline{B_2(0)} & \text{, falls } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Ist G holomorph-konvex?

Hinweis: Beachte den Kugelsatz von Hartogs (siehe Blatt 7).