

Alternativklausur zur Mathematik I

Montag, den 04.04.2011, 14:15–16:45 Uhr,
Hörsaal IV, Lahnberge

Name: Muster -

Vorname: Lösung

Matrikelnummer:

Studiengang:

Diese Klausur ist mein letzter Prüfungsversuch in diesem Modul: ☐ ja ☐ nein

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter dem Aufgabentext, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Als Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes DIN-A4 Blatt mit Notizen zur Vorlesung zulässig.

Es werden maximal 24 Punkte erwartet, d. h. 24 Punkte entsprechen 100%.

Viel Erfolg!

[illegible]

Name:

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ bezeichne a_n die n -te Fibonaccizahl, d.h.

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ und } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Beweis durch Induktion nach n :

• Induktionsanfang ($n=1$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{1+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1+2} & a_{1+1} \\ a_{1+1} & a_1 \end{pmatrix}$$

• Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{(n+1)+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Induktionsvor.
 $\downarrow$

$$= \begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} + a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n+1} + a_n & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

Definition a_n
 $\downarrow$

$$= \begin{pmatrix} a_{n+3} & a_{n+2} \\ a_{n+2} & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{(n+1)+2} & a_{(n+1)+1} \\ a_{(n+1)+1} & a_{(n+1)} \end{pmatrix}$$



Name:

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Zeige:

a) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann für alle $b \in \mathbb{R}^3$ eindeutig lösbar, wenn $\alpha \neq 1$ ist.

b) Bestimme im Fall $\alpha = 1$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$Ax = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \det A &\stackrel{\substack{\text{Laplace} \\ (1.\text{-Zeile})}}{=} \alpha \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha (2 + 1) - 3 (-1 + 2) \\ &= 3\alpha - 3 = 3(\alpha - 1) \end{aligned}$$

Damit:

$$Ax = b \quad \forall b \in \mathbb{R}^3 \text{ eindeutig lösbar}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ invertierbar}$$

$$\Leftrightarrow 0 \neq \det A = 3(\alpha - 1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha \neq 1.$$

$$\text{b) Es ist } \alpha = 1, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{+} \\ \xrightarrow{+} \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \xrightarrow{+} \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ Eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ist

$$x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{oben abgelesen})$$

- Obige Umformung für das homogene System $Ax = 0$ liefert offenbar (gleiche Rechnungen):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Damit folgt für den Lösungsraum $\mathbb{L}_A$ des homogenen Systems:

$$\mathbb{L}_A = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Nach Vorlesung ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von $Ax = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ also gegeben durch:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$



Name:

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^5$ linear unabhängige Vektoren. Bestimme die Dimension des Untervektorraums U , welcher durch

$$U = \text{span} \{u+v, u+w, v+w\}$$

gegeben ist.

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 (u+v) + \lambda_2 (u+w) + \lambda_3 (v+w) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)u + (\lambda_1 + \lambda_3)v + (\lambda_2 + \lambda_3)w = 0$$

Da u, v, w nach Voraussetzung linear unabhängig sind, folgt:

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \cdot (-1) \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_3 = 0 \end{array}$$

d.h. es folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Die Vektoren $u+v, u+w, v+w$ sind also linear unabhängig. Damit folgt:

$$\dim U = 3.$$

Name:

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Zeige:

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & c \\ 0 & \boxed{A} & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & d \end{pmatrix}}_{=: B} = (ad - bc) \det A$$

Sei $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 - \\ \vdots \\ -\beta_n - \end{pmatrix}$, d.h. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ bezeichne die

Spalten und $\beta_1, \dots, \beta_n$ die Zeilen von A . Damit:

$$\det B = \det \begin{pmatrix} a & 0 & & 0 & c \\ 0 & | & & | & 0 \\ \vdots & \alpha_1 & \dots & \alpha_n & \vdots \\ 0 & | & & | & 0 \\ b & 0 & & 0 & d \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} a & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & | & & | \\ \vdots & \vdots & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 0 & 0 & | & & | \\ b & d & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n \det \begin{pmatrix} a & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & -\beta_n & & \\ b & d & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot \det \begin{pmatrix} a & c & 0 & \dots & 0 \\ b & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & -\beta_n & & \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a & c & 0 & \dots & 0 \\ b & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{A} & & \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Vorlesung} \\ (\text{Blockmatrix})}}{=} \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \det A$$

$$= (ad - bc) \det A$$



Name:

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{P}_2$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 2 und $\alpha : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ die durch

$$p \mapsto \alpha(p) := p(0) + p''$$

gegebene lineare Abbildung. Bestimme die Eigenwerte und Basen der Eigenräume von α .

Matrixdarstellung:

Sei $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ die Matrix von α bzgl. der Basis $(1, t, t^2)$ von $\mathbb{P}_2$. Es ist

$$\left. \begin{array}{l} \alpha(1) = 1 + 0 = 1 \\ \alpha(t) = 0 + 0 = 0 \\ \alpha(t^2) = 0 + 2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_\alpha(T) = \det(M(\alpha) - T \cdot E) = \det \begin{pmatrix} 1-T & 0 & 2 \\ 0 & -T & 0 \\ 0 & 0 & -T \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\substack{\text{Laplace} \\ (\text{3. Zeile})}}{=} -T \cdot \det \begin{pmatrix} 1-T & 0 \\ 0 & -T \end{pmatrix} = T^2(1-T)$$

Also: $\chi_\alpha(T) = 0 \Leftrightarrow T = 0$ oder $T = 1$.

Die Eigenwerte von α sind also 0 und 1.

Eigenräume:

$$\bullet E_0 = \text{Kern}(M(\alpha) - 0 \cdot E) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ Eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert 0 ist:
 $\{t, -2+t^2\}$

$$\bullet E_1 = \text{Kern}(M(\alpha) - 1 \cdot E) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ Eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert 1 ist:
 $\{1\}$



Name:

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zeige: Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ hat reelle Eigenwerte genau dann, wenn

$$-4 \det M + (\operatorname{sp} M)^2 \geq 0$$

ist.

Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. M hat reelle Eigenwerte

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms} \\ \chi_M(T) &= \det(M - TE) = \det \begin{pmatrix} a-T & b \\ c & d-T \end{pmatrix} \\ &= (a-T)(d-T) - bc \\ &= ad - aT - dT + T^2 - bc \\ &= T^2 - (a+d)T + (ad-bc) \end{aligned}$$

sind reell.

p-q-Formel

$$\Leftrightarrow \underbrace{(-(a+d))}_{\operatorname{sp} M}^2 - 4 \underbrace{(ad-bc)}_{\det M} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -4 \det M + (\operatorname{sp} M)^2 \geq 0$$



Name:

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Diagonalisiere die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

d.h. gib eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ an, so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

- Berechne charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} \chi_A(T) &= \det(A - TE) = \det \begin{pmatrix} 1-T & 1 \\ 1 & -T \end{pmatrix} = -T(1-T) - 1 \\ &= T^2 - T - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Lösungsformel: } T_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\Rightarrow \chi_A(T) = (T - \alpha)(T - \beta)$$

$$\text{mit } \alpha := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad \beta := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$

(α und β sind die Eigenwerte von A).

- Bestimme Eigenräume:

$$E_\alpha = \text{Kern}(A - \alpha E) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1-\alpha & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(\alpha-1)}$$

$$= \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Denn: } 1 - \alpha(\alpha - 1) = 1 - \alpha^2 + \alpha \\ \quad \quad \quad = -(\alpha^2 - \alpha - 1) \\ \quad \quad \quad = -\chi_\alpha(\alpha) = 0 \end{array} \right)$$

$$E_\beta = \text{Kern}(A - \beta E) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1-\beta & 1 \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$= \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 1-\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow + \end{matrix} \cdot (\beta-1)$$

$$= \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Wähle $S^{-1} := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Invertiere S^{-1} , um S zu erhalten:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & | & 1 & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \cdot (-\frac{1}{\alpha}) \\ \leftarrow + \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta & | & 1 & 0 \\ 0 & 1-\frac{\beta}{\alpha} & | & -\frac{1}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot \frac{1}{\alpha} \\ \cdot \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \end{matrix}$$

$\underbrace{1-\frac{\beta}{\alpha}}_{=\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{\alpha} & | & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{-1}{\alpha-\beta} & \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow \cdot (-\frac{\beta}{\alpha}) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)} & \frac{-\beta}{\alpha-\beta} \\ 0 & 1 & | & \frac{-1}{\alpha-\beta} & \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \end{pmatrix}$$

Da $\frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)} = \frac{\alpha-\beta+\beta}{\alpha(\alpha-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}$ folgt:

$$S = \frac{1}{\alpha-\beta} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

d.h.

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ -1 & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{pmatrix}$$



Name:

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Ist die Matrix

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

orthogonal bezüglich des euklidischen Skalarproduktes?

Berechnen die Norm der zweiten Spalte:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\| &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1^2 + 0^2 + (-1)^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \neq 1 \end{aligned}$$

Damit ist die Matrix nach Vorlesung nicht orthogonal.



Name:

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Berechne aus den Vektoren

$\underbrace{(2i, i, 2i)}_{=: v_1}, \underbrace{(9i, 0, 9i)}_{=: v_2}$ und $\underbrace{(i, 0, 0)}_{=: v_3}$
eine Orthonormalbasis bezüglich des Standard-Skalarproduktes des $\mathbb{C}^3$, welches durch

$$\langle z | w \rangle = \sum_{i=1}^3 z_i \overline{w_i}$$

gegeben ist.

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad , \quad \|v_1\| = \langle (2i, i, 2i) | (2i, i, 2i) \rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= (2i \cdot 2\bar{i} + i \cdot \bar{i} + 2i \cdot 2\bar{i})^{\frac{1}{2}} \\ &= (4 + 1 + 4)^{\frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{w_1 = \frac{1}{3} (2i, i, 2i)}$$

$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} \quad \text{mit} \quad \tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2 | w_1 \rangle w_1$$

$$\begin{aligned} \langle v_2 | w_1 \rangle &= \langle (9i, 0, 9i) | (\frac{2}{3}i, \frac{1}{3}i, \frac{2}{3}i) \rangle \\ &= \frac{1}{3} (9i \cdot 2\bar{i} + 0 \cdot \bar{i} + 9i \cdot 2\bar{i}) = \frac{1}{3} \cdot 36 = 12 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{w}_2 = (9i, 0, 9i) - \frac{12}{3} (2i, i, 2i) = (i, -4i, i)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}_2\| &= \langle (i, -4i, i) | (i, -4i, i) \rangle^{\frac{1}{2}} = (i \cdot \bar{i} + 4i \cdot 4\bar{i} + i \cdot \bar{i})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{18} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{w_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} (i, -4i, i)}$$

$$\bullet w_3 = \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} \quad \text{mit} \quad \tilde{w}_3 = v_3 - \langle v_3 | w_1 \rangle w_1 - \langle v_3 | w_2 \rangle w_2$$

$$\begin{aligned} \langle v_3 | w_1 \rangle &= \langle (i, 0, 0) | (\frac{2}{3}i, \frac{1}{3}i, \frac{2}{3}i) \rangle \\ &= \frac{1}{3} (i \cdot 2\bar{i} + 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot 2\bar{i}) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle v_3 | w_2 \rangle &= \langle (i, 0, 0) | (\frac{i}{3\sqrt{2}}, \frac{-4i}{3\sqrt{2}}, \frac{i}{3\sqrt{2}}) \rangle \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} (i\bar{i} + 0 \cdot \overline{(-4i)} + 0 \cdot \bar{i}) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{w}_3 &= (i, 0, 0) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} (2i, i, 2i) - \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} (i, -4i, i) \\ &= (i - \frac{4}{9}i - \frac{1}{18}i, 0 - \frac{2}{9}i + \frac{4}{18}i, 0 - \frac{4}{9}i - \frac{1}{18}i) \\ &= (\frac{i}{2}, 0, \frac{-i}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}_3\| &= \langle (\frac{i}{2}, 0, \frac{-i}{2}) | (\frac{i}{2}, 0, \frac{-i}{2}) \rangle^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (i\bar{i} + 0 \cdot 0 + i\bar{i})^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{w_3 = \frac{2}{\sqrt{2}} (\frac{i}{2}, 0, \frac{-i}{2}) = (\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-i}{\sqrt{2}})}$$

Die gesuchte ONB ist also

$$\left\{ \left(\frac{2i}{3}, \frac{i}{3}, \frac{2i}{3} \right), \left(\frac{i}{3\sqrt{2}}, \frac{-4i}{3\sqrt{2}}, \frac{i}{3\sqrt{2}} \right), \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-i}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

