Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. F. W. Knöller
Dipl.-Math. T. Geiger

Wintersemester 2010/2011

Alternativklausur zur Mathematik I

Montag, den 04.04.2011, 14:15–16:45 Uhr,
Hörsaal IV, Lahnberge

Name: . . . .

Vorname: . . . .

Matrikelnummer: . . . .

Studiengang: . . . .

Diese Klausur ist mein letzter Prüfungsversuch in diesem Modul: ☐ ja ☐ nein

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter dem Aufgabentext, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Als Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes DIN-A4 Blatt mit Notizen zur Vorlesung zulässig.

Es werden maximal 24 Punkte erwartet, d. h. 24 Punkte entsprechen 100%.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
max. Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	4	36
erreichte Punkte										

Name: ....

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$ bezeichne a_n die n-te Fibonaccizahl, d.h.

$$a_1 = a_2 = 1 \;\text{ und }\; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Name: ....

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Zeige:

a) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann für alle $b \in \mathbb{R}^3$ eindeutig lösbar, wenn $\alpha \neq 1$ ist.

b) Bestimme im Fall $\alpha = 1$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$Ax = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Name: ....

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^5$ linear unabhängige Vektoren. Bestimme die Dimension des Untervektorraums U, welcher durch

$$U = \operatorname{span}\{u + v,\, u + w,\, v + w\}$$

gegeben ist.

Name: ....

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Zeige:

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & c \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & A & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & d \end{pmatrix} = (ad - bc) \det A$$

Name: ....

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{P}_2$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad $\leqslant 2$ und $\alpha : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ die durch

$$p \longmapsto \alpha(p) := p(0) + p''$$

gegebene lineare Abbildung. Bestimme die Eigenwerte und Basen der Eigenräume von α.

Name: ....

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zeige: Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ hat reelle Eigenwerte genau dann, wenn

$$-4 \det M + (\operatorname{sp} M)^2 \geqslant 0$$

ist.

Name: ....

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Diagonalisiere die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

d.h. gib eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

Name: ....

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Ist die Matrix

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

orthogonal bezüglich des euklidischen Skalarproduktes?

Name: ....

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Berechne aus den Vektoren

$$(2i, i, 2i),\ (9i, 0, 9i) \text{ und } (i, 0, 0)$$

eine Orthonormalbasis bezüglich des Standard-Skalarproduktes des $\mathbb{C}^3$, welches durch

$$\langle z \mid w \rangle = \sum_{i=1}^{3} z_i \overline{w_i}$$

gegeben ist.

Name: ....

Zusatzblatt 1

Name: ....

Zusatzblatt 2

Name: ....

Zusatzblatt 3

Name: ....

Zusatzblatt 4

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. F. W. Knöller
Dipl.-Math. T. Geiger

Wintersemester 2010/2011

Alternativklausur zur Mathematik I

Montag, den 04.04.2011, 14:15–16:45 Uhr,
Hörsaal IV, Lahnberge

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$ bezeichne a_n die n-te Fibonaccizahl, d.h.

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ und } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Zeige:

a) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann für alle $b \in \mathbb{R}^3$ eindeutig lösbar, wenn $\alpha \neq 1$ ist.

b) Bestimme im Fall $\alpha = 1$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$Ax = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^5$ linear unabhängige Vektoren. Bestimme die Dimension des Untervektorraums U, welcher durch

$$U = \operatorname{span}\{u + v,\ u + w,\ v + w\}$$

gegeben ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Zeige:

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & c \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & A & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & d \end{pmatrix} = (ad - bc) \det A$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{P}_2$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad $\leqslant 2$ und $\alpha : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ die durch

$$p \longmapsto \alpha(p) := p(0) + p''$$

gegebene lineare Abbildung. Bestimme die Eigenwerte und Basen der Eigenräume von α.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zeige: Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ hat reelle Eigenwerte genau dann, wenn

$$-4 \det M + (\operatorname{sp} M)^2 \geqslant 0$$

ist.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Diagonalisiere die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

d.h. gib eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Ist die Matrix

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

orthogonal bezüglich des euklidischen Skalarproduktes?

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Berechne aus den Vektoren

$$(2i, i, 2i),\ (9i, 0, 9i) \text{ und } (i, 0, 0)$$

eine Orthonormalbasis bezüglich des Standard-Skalarproduktes des $\mathbb{C}^3$, welches durch

$$\langle z \mid w \rangle = \sum_{i=1}^{3} z_i \overline{w_i}$$

gegeben ist.