

[illegible]

Name:

Aufgabe 1 (2+2=4 Punkte)

Seien V und W endlich-dimensionale K -Vektorräume und $\varphi : V \rightarrow W$ linear. Zeige:

- a) Ist $\dim V > \dim W$, so ist φ nicht injektiv.
- b) Ist $\dim V < \dim W$, so ist φ nicht surjektiv.

Die Dimensionsformel liefert:

$$\dim V = \dim \text{Bild } \varphi + \dim \text{Kern } \varphi \quad (*)$$

Zu a): Mit (*):

$$\dim \text{Kern } \varphi = \dim V - \underbrace{\dim \text{Bild } \varphi}_{\leq \dim W} \geq \dim V - \overset{\text{Vor.}}{\downarrow} \dim W \geq 0$$

$\Rightarrow \text{Kern } \varphi \neq \{0\}$ d.h. φ ist nicht injektiv.

Zu b): Mit (*):

$$\dim \text{Bild } \varphi = \dim V - \underbrace{\dim \text{Kern } \varphi}_{\geq 0} \leq \dim V \overset{\text{Vor.}}{\downarrow} < \dim W$$

$\Rightarrow \text{Bild } \varphi \neq W$ d.h. φ ist nicht surjektiv.



Name:

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

invertierbar? Bestimme zu diesen λ die Matrix A^{-1} .

- Berechne Determinante:

$$\det A \stackrel{\text{Laplace, Z.1}}{=} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Laplace}}{=} 1 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} - \lambda^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = 1 - \lambda^2$$

Damit: A invertierbar $\stackrel{\text{VL}}{\Leftrightarrow} \det A \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \notin \{-1, 1\}$

- Bestimme inverse Matrix: Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \cdot (-\lambda) \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \cdot \left(\frac{-\lambda}{1-\lambda^2} \right) \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & \frac{-\lambda}{1-\lambda^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \cdot (-\lambda) \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a^2}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-a^3}{1-a^2} & \frac{a^2}{1-a^2} & -a & 1 \end{array} \right) \leftarrow \cdot \frac{1}{1-a^2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a^2}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-a^3}{1-a^2} & \frac{a^2}{1-a^2} & -a & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} + \\ \cdot (-a) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{a^2}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a^2}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-a^3}{1-a^2} & \frac{a^2}{1-a^2} & -a & 1 \end{array} \right)$$

Also folgt:

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 1 + \frac{a^2}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} & 0 & 0 \\ \frac{-a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} & 0 & 0 \\ \frac{a^2}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} & 1 & 0 \\ \frac{-a^3}{1-a^2} & \frac{a^2}{1-a^2} & -a & 1 \end{array} \right)$$

Name:

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimme das charakteristische Polynom von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

und gib seine Nullstellen an.

Charakteristisches Polynom:

$$\chi_A(T) = \det(A - TE) = \det \begin{pmatrix} 1-T & 3 \\ -2 & -T \end{pmatrix}$$

$$= -T(1-T) + 6$$

$$= T^2 - T + 6$$

Nullstellen (mit quadratischer Ergänzung):

$$\chi_A(T) = T^2 - T + 6 = T^2 - 2T \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 6$$

$$= \left(T - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 6 = \left(T - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}$$

$$= \left(T - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{23}}{2}i\right)^2$$

$$= \left(T - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}i\right) \left(T - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2}i\right)$$

$$= \left(T - \left(\frac{1 + \sqrt{23}i}{2}\right)\right) \left(T - \left(\frac{1 - \sqrt{23}i}{2}\right)\right)$$

$\Rightarrow$ Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind

$$\frac{1 + \sqrt{23}i}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1 - \sqrt{23}i}{2} \in \mathbb{C}.$$



Name:

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Berechne die Determinante von

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}.$$

Schreibe $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & \dots & | \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ | & \dots & | \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & \dots & | \\ \beta_1 & \dots & \beta_n \\ | & \dots & | \end{pmatrix}$

d.h. α_i sind die Spalten von $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$, β_i die Spalten von $\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dann:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} | & \dots & | & | & \dots & | \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m & \beta_1 & \dots & \beta_n \\ | & \dots & | & | & \dots & | \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ m \text{ Ver-} \\ \text{tauschungen}}} (-1)^m \det \begin{pmatrix} | & | & | & | & | & | \\ \beta_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_m & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ | & | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= ((-1)^m)^2 \det \begin{pmatrix} | & | & | & | & | & | \\ \beta_1 & \beta_2 & \alpha_1 & \dots & \alpha_m & \beta_3 & \dots & \beta_n \\ | & | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{insg. } n\text{-mal} \\ \downarrow}} = \dots = ((-1)^m)^n \det \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \beta_1 & \dots & \beta_n & \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{n \cdot m} \det \begin{pmatrix} B & A \\ 0 & C \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{VL}}} (-1)^{n \cdot m} \det B \cdot \det C.$$



Name:

Aufgabe 5 (2+2=4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, d.h. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Zeige:

a) Es ist $\det A \in \mathbb{Z}$.

b) A ist invertierbar mit $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, genau dann, wenn $\det A \in \{-1, 1\}$.

Zu a): Mit Leibniz-Formel (alternativ: Laplace)

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot \underbrace{a_{\sigma(1),1}}_{\in \{\pm 1\} \subset \mathbb{Z}} \cdot \underbrace{a_{\sigma(2),2}}_{\in \mathbb{Z}} \cdots \underbrace{a_{\sigma(n),n}}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}.$$

Zu b): " $\Rightarrow$ ": $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$. Da $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ folgt mit a)

$\det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$, d.h. $\frac{1}{\det A} \in \mathbb{Z}$. Also: $\det A \in \{-1, 1\}$.

" $\Leftarrow$ ": $\det A \in \{-1, 1\} \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A$ ist invertierbar.

$\Rightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sei $A^{-1} = (b_{ij})_{i,j}$. Noch zu zeigen: $b_{ij} \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Es ist } A^{-1} e_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = e_j$$

Die Cramersche-Regel ($\det A \neq 0 \forall$) liefert:

$$b_{ij} = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & \tilde{e_j} & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{j(i-1)} & 1 & a_{j(i+1)} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & 0 & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A} \left. \begin{array}{l} \text{da Matrix aus } \mathbb{Z}^{n \times n} \\ \in \mathbb{Z} \text{ (d.h. folgt mit a)} \end{array} \right\} \in \{-1, 1\}$$

Also folgt $b_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$ und damit $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$.



Name:

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Diagonalisiere die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

d.h. gib eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ an, so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

- Berechne charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} \chi_A(T) &= \det(A - TE) = \det \begin{pmatrix} 5-T & 1 \\ 1 & 5-T \end{pmatrix} = (5-T)^2 - 1 \\ &= (5-T)^2 - 1^2 = (5-T-1)(5-T+1) \\ &= (4-T)(6-T) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte von A sind 4 und 6.

- Bestimme Eigenräume:

$$\begin{aligned} E_4 &= \text{Kern}(A - 4E) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\leftarrow -} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_6 &= \text{Kern}(A - 6E) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\leftarrow +} = \text{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^2$ bestehend aus Eigenvektoren von A .

Wähle $S^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$

Invertiere S^{-1} , um S zu erhalten:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ \leftarrow - \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \leftarrow \cdot (-\frac{1}{2})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \leftarrow - \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Also ist:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Kontrolle (ist nicht verlangt):

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$



Name:

Aufgabe 7 (2+2=4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit $A = -{}^t A$. Zeige:

a) Für alle $T \in \mathbb{R}$ ist

$$\chi_A(-T) = (-1)^n \chi_A(T),$$

wobei χ_A das charakteristische Polynom von A bezeichne.

b) Ist n ungerade, so gilt $\det A = 0$.

Zu a): Es ist:

$$\begin{aligned} \chi_A(-T) &= \det(A + TE) \stackrel{\text{VL}}{=} \det({}^t(A + TE)) = \det({}^t A + T {}^t E) \\ &= \det({}^t A + TE) \stackrel{\text{Vor.}}{=} \det(-A + TE) = \det(-(A - TE)) \\ &= (-1)^n \det(A - TE) \\ &= (-1)^n \chi_A(T). \end{aligned}$$

Zu b): n ungerade $\stackrel{\text{Teil a)}}{\Rightarrow} \chi_A(-T) = -\chi_A(T) \quad \forall T \in \mathbb{R}.$

Nach VL gilt für das charakteristische Polynom:

$$\chi_A(T) = c_n T^n + c_{n-1} T^{n-1} + \dots + c_0 \quad \text{für gewisse } c_i \in \mathbb{R}$$

und es ist $c_0 = \det A$.

Damit:

$$c_0 = \chi_A(0) = \chi_A(-0) \stackrel{\text{a)}}{=} -\chi_A(0) = -c_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 0.$$

Also folgt:

$$\det A = c_0 = 0.$$



Name:

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{P}_n$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad $\leq n$. Bestimme die Eigenwerte und die Dimensionen der Eigenräume der linearen Abbildung

$$D: \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n, \quad p \longmapsto p + p'.$$

Ist D diagonalisierbar?

Sei $M(D) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ die Matrix von D bzgl. der Basis

$(1, t, t^2, \dots, t^n)$ von $\mathbb{P}_n$. Für $j \in \{0, \dots, n\}$ ist $D(t^j) = t^j + j t^{j-1}$.

Also folgt:

$$M(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & n & \\ & & & 1-T \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir das charakteristische Polynom:

$$\chi_D(T) = \det(M(D) - T \cdot E) = \det \begin{pmatrix} 1-T & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & n & \\ & & & 1-T \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{obere} \\ \Delta\text{-Matrix}}}{=} (1-T)^{n+1}$$

Also $\chi_D(T) = 0 \Leftrightarrow T = 1$ d.h. 1 ist einziger Eigenwert von D .

Dimension des Eigenraums:

Sei $p = \sum_{k=0}^n a_k t^k \in \mathbb{P}_n$.

$$f(p) = p \Leftrightarrow p + p' = p \Leftrightarrow p' = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k \cdot k t^{k-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow p \in \text{span}\{1\}.$$

$$\Rightarrow \dim E_1 = 1.$$

Falls $n = 0$: alg. Vielfachheit von 1 = 1 = $\dim E_1 \Rightarrow D$ diagonalisierbar

Falls $n > 0$: alg. Vielfachheit von 1 > 1 = $\dim E_1 \Rightarrow D$ nicht diagonalisierbar



Name:

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum, d.h. ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Weiter seien Vektoren a , b und c aus V gegeben so dass

$$(a - c) \perp (b - c)$$

gilt. Zeige, dass dann die Gleichung

$$\|a - c\|^2 + \|b - c\|^2 = \|a - b\|^2$$

gilt.

Es ist:

$$\begin{aligned} \|a - b\|^2 &= \|a - c + c - b\|^2 = (a - c + c - b | a - c + c - b) \\ &= (a - c | a - c) + (a - c | c - b) + (c - b | a - c) + (c - b | c - b) \\ &= \|a - c\|^2 - \underbrace{(a - c | b - c)}_{= 0 \text{ nach Vor.}} - \underbrace{(a - c | b - c)}_{= 0 \text{ nach Vor.}} + \|c - b\|^2 \\ &= \|a - c\|^2 + \|b - c\|^2 \end{aligned}$$

Dies ist die behauptete Gleichung.

