Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. F. W. Knöller
Dipl.-Math. T. Geiger

Wintersemester 2010/2011

Klausur zur Mathematik I

Mittwoch, den 16.02.2011, 12:30–15:00 Uhr,
Hörsäle 5 und 113, Hörsaalgebäude Biegenstraße

Name: . . . .

Vorname: . . . .

Matrikelnummer: . . . .

Studiengang: . . . .

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter dem Aufgabentext, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Als Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes DIN-A4 Blatt mit Notizen zur Vorlesung zulässig.

Es werden maximal 24 Punkte erwartet, d. h. 24 Punkte entsprechen 100%.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
max. Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	4	36
erreichte Punkte										

Name: ....

Aufgabe 1 (2+2=4 Punkte)

Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ linear. Zeige:

a) Ist $\dim V > \dim W$, so ist φ nicht injektiv.

b) Ist $\dim V < \dim W$, so ist φ nicht surjektiv.

Name: ....

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

invertierbar? Bestimme zu diesen λ die Matrix A^{-1}.

Name: ....

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimme das charakteristische Polynom von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und gib seine Nullstellen an.

Name: ....

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Berechne die Determinante von

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}.$$

Name: ....

Aufgabe 5 (2+2=4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, d.h. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Zeige:

a) Es ist $\det A \in \mathbb{Z}$.

b) A ist invertierbar mit $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, genau dann, wenn $\det A \in \{-1, 1\}$.

Name: ....

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Diagonalisiere die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

d.h. gib eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

Name: ....

Aufgabe 7 (2+2=4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $A = -{}^tA$. Zeige:

a) Für alle $T \in \mathbb{R}$ ist
$$\chi_A(-T) = (-1)^n \chi_A(T)\,,$$
wobei χ_A das charakteristische Polynom von A bezeichne.

b) Ist n ungerade, so gilt $\det A = 0$.

Name: ....

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{P}_n$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad $\leqslant n$. Bestimme die Eigenwerte und die Dimensionen der Eigenräume der linearen Abbildung

$$D : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n, \quad p \longmapsto p + p'.$$

Ist D diagonalisierbar?

Name: ....

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum, d.h. ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Weiter seien Vektoren a, b und c aus V gegeben so dass

$$(a - c) \perp (b - c)$$

gilt. Zeige, dass dann die Gleichung

$$\|a - c\|^2 + \|b - c\|^2 = \|a - b\|^2$$

gilt.

Name: ....

Zusatzblatt 1

Name: ....

Zusatzblatt 2

Name: . . . .

Zusatzblatt 3

Name: ....

Zusatzblatt 4

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. F. W. Knöller
Dipl.-Math. T. Geiger

Wintersemester 2010/2011

Klausur zur Mathematik I

Mittwoch, den 16.02.2011, 12:30–15:00 Uhr,
Hörsäle 5 und 113, Hörsaalgebäude Biegenstraße

Aufgabe 1 (2+2=4 Punkte)

Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ linear. Zeige:

a) Ist $\dim V > \dim W$, so ist φ nicht injektiv.

b) Ist $\dim V < \dim W$, so ist φ nicht surjektiv.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

invertierbar? Bestimme zu diesen λ die Matrix A^{-1}.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimme das charakteristische Polynom von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und gib seine Nullstellen an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Berechne die Determinante von

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}.$$

Aufgabe 5 (2+2=4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, d.h. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Zeige:

a) Es ist $\det A \in \mathbb{Z}$.

b) A ist invertierbar mit $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, genau dann, wenn $\det A \in \{-1, 1\}$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Diagonalisiere die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

d.h. gib eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ an, so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 7 (2+2=4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit $A = -{}^tA$. Zeige:

a) Für alle $T \in \mathbb{R}$ ist

$$\chi_A(-T) = (-1)^n \chi_A(T)\,,$$

wobei χ_A das charakteristische Polynom von A bezeichne.

b) Ist n ungerade, so gilt $\det A = 0$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{P}_n$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad $\leqslant n$. Bestimme die Eigenwerte und die Dimensionen der Eigenräume der linearen Abbildung

$$D : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n, \quad p \longmapsto p + p'.$$

Ist D diagonalisierbar?

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum, d.h. ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Weiter seien Vektoren a, b und c aus V gegeben so dass

$$(a - c) \perp (b - c)$$

gilt. Zeige, dass dann die Gleichung

$$\|a - c\|^2 + \|b - c\|^2 = \|a - b\|^2$$

gilt.