Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. F. W. Knöller
Dr. M. Stemmler

Wintersemester 2010/2011

Zwischenklausur zur Mathematik I

Samstag, den 11.12.2010, 9:30–12:00 Uhr,
Hörsäle 101, 102 und 103, Landgrafenhaus

Name: Muster —

Vorname:

Matrikelnummer: Lösung

Studiengang:

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter dem Aufgabentext, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Es werden maximal 24 Punkte erwartet, d. h. 24 Punkte entsprechen 100%.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
max. Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	4	36
erreichte Punkte										

Name: ....

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige:

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n < n^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{für alle } n \geqslant 2.$$

Beweis durch Induktion nach n:

Sei $I := \left\{ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \;\middle|\; 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n < n^{\frac{n(n+1)}{2}} \right\}$.

Induktionsanfang: $2 \in I$:

$$1 \cdot 2^2 = 4 < 8 = 2^{\frac{2 \cdot 3}{2}} \implies 2 \in I.$$

Induktionsschritt: $2 \leqslant n \in I \implies n+1 \in I$:

$$\begin{aligned}
1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n \cdot \underbrace{(n+1)^{n+1}}_{> 0} &\underset{\substack{\uparrow \\ n \in I}}{<} n^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (n+1)^{n+1} \\
&< (n+1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (n+1)^{n+1} \\
&= (n+1)^{\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)} \\
&= (n+1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}
\end{aligned}$$

$$\implies n+1 \in I.$$

Nach dem Induktionsprinzip ist

$$I = \{ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \},$$

woraus die Behauptung folgt.

Name: ....

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

a) Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

b) Folgere: Für jede Primzahl p mit $p \geqslant 3$ gilt in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$:

$$[1]^3 + [2]^3 + \cdots + [p-1]^3 = [0].$$

a) Beweis durch Induktion nach n:

Sei $I := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right\}$.

Induktionsanfang: $0 \in I$:

$$\sum_{k=1}^{0} k^3 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{leere Summe}}}{=} 0 = \frac{0^2(0+1)^2}{4} \implies 0 \in I.$$

Induktionsschritt: $n \in I \implies n+1 \in I$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \underset{\substack{\uparrow \\ n \in I}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1 \right) = \frac{(n+1)^2}{4} \left(\underbrace{n^2 + 4n + 4}_{= (n+2)^2} \right)$$

$$= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} \implies n+1 \in I.$$

Nach dem Induktionsprinzip ist $I = \mathbb{N}$, woraus die Behauptung folgt.

b) $$[1]^3 + [2]^3 + \cdots + [p-1]^3 = \sum_{k=1}^{p-1} [k]^3 = \sum_{k=1}^{p-1} [k^3]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{p-1} k^3 \right] \underset{\substack{\uparrow \\ a)}}{=} \left[\frac{(p-1)^2}{4} p^2 \right] = [0],$$

da p ungerade $\implies (p-1)$ gerade $\implies (p-1)^2$ teilbar durch 4

$$\implies \frac{(p-1)^2}{4} \in \mathbb{Z} \implies \frac{(p-1)^2}{4} p^2 = \frac{(p-1)^2}{4} p \cdot p \in p\mathbb{Z}.$$

Name: ....

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Löse in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ die Gleichungen

$$x^3 - [2] = [0]$$

und

$$x^3 + [2] = [0].$$

Die Gleichungen sind äquivalent zu

$$x^3 = [2]$$

bzw.

$$x^3 = -[2] = [3].$$

Durch Ausrechnen erhält man folgende Tabelle:

x	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
x^3	$[0]$	$[1]$	$\underline{\underline{[3]}}$	$\underline{\underline{[2]}}$	$[4]$

Wir lesen ab:

$$\{x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \mid x^3 - [2] = [0]\} = \{[3]\},$$

$$\{x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \mid x^3 + [2] = [0]\} = \{[2]\}.$$

Name: ....

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gib für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Lösungsraumes $\mathbb{L}_A$ an.

Addition des (-2)-fachen der ersten zur zweiten Zeile:

$\mathbb{L}_A = \mathbb{L}_{A'}$ mit

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 5}.$$

Setze

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 4}.$$

Dann ist eine Basis des Lösungraumes $\mathbb{L}_{\tilde{A}} \subset \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$(-1, 1, 0, 0), \quad (2, 0, 1, 0), \quad (4, 0, 0, 1).$$

Über die erste Zeile von A bzw. A' erhält man daraus eine Basis des Lösungsraumes $\mathbb{L}_A$:

$$(0, -1, 1, 0, 0),$$

$$(-1/3, 2, 0, 1, 0),$$

$$(-2/3, 4, 0, 0, 1).$$

Name: ....

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Zeige: Zwei Vektoren (x, y) und (x', y') des $\mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn

$$xy' - x'y = 0.$$

„$\Longrightarrow$": Seien $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ linear abhängig.

$\Longrightarrow \exists\, \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, nicht beide 0, mit $\lambda(x,y) + \lambda'(x',y') = (0,0)$. (*)

Sei o. B. d. A. $\lambda \neq 0$ (sonst vertausche die Bezeichnungen).

(*) bedeutet:

$$\begin{aligned} \lambda x + \lambda' x' &= 0 \quad | \cdot y' \\ \lambda y + \lambda' y' &= 0 \quad | \cdot x' \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} \lambda x y' + \lambda' x' y' &= 0 \\ \lambda x' y + \lambda' x' y' &= 0 \end{aligned} \quad -$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda (xy' - x'y) = 0$$

$$\underset{\lambda \neq 0}{\Longrightarrow} \quad xy' - x'y = 0.$$

„$\Longleftarrow$": Gelte $xy' - x'y = 0$.

Sei o. B. d. A. nicht $(x,y) = (x',y') = (0,0)$. (Sonst trivial.)

$\Longrightarrow (x,x') \neq (0,0)$ oder $(y,y') \neq (0,0)$.

Sei o. B. d. A. $(y,y') \neq (0,0)$ (sonst vertausche die Bezeichnungen).

Es gilt:

$$y'(x,y) + (-y)(x',y') = (\underbrace{xy' - x'y}_{= 0 \text{ n. Vor.}}, \underbrace{y'y - yy'}_{= 0}) = (0,0).$$

Da $y', -y$ nicht beide 0 sind, sind $(x,y), (x',y')$ linear abhängig.

Name: ....

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zeige: Die Funktionen

$$x \longmapsto \frac{1}{x+1},$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x+2},$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x+3}$$

sind linear unabhängig in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$.

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\frac{\lambda_1}{x+1} + \frac{\lambda_2}{x+2} + \frac{\lambda_3}{x+3} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$.

Durch Multiplikation mit $(x+1)(x+2)(x+3)$ folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 (x+2)(x+3) + \lambda_2 (x+1)(x+3) + \lambda_3 (x+1)(x+2) \\ &= \lambda_1 (x^2+5x+6) + \lambda_2 (x^2+4x+3) + \lambda_3 (x^2+3x+2) \\ &= (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x^2 + (5\lambda_1+4\lambda_2+3\lambda_3)x + (6\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3)\cdot 1 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}_+$.

Da $1, x, x^2$ linear unabhängig sind, folgt:

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &=& 0 \quad \cdot(-5) \quad \cdot(-6) \\ 5\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 &=& 0 \quad + \\ 6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &=& 0 \quad + \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &=& 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 &=& 0 \quad \mid \cdot(-1) \quad \cdot 3 \\ -3\lambda_2 - 4\lambda_3 &=& 0 \quad + \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 &=& 0 \\ 2\lambda_3 &=& 0 \end{array}$$

Es folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ und damit die Behauptung.

Name: ....

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Die Untervektorräume $U, W \subset \mathbb{R}^4$ seien gegeben durch

$$U = \langle (1,3,0,1), (1,0,0,-1), (-1,3,0,3) \rangle,$$
$$W = \langle (0,3,2,2), (0,0,2,0) \rangle.$$

Gib die Dimensionen von U, W, $U \cap W$ und $U + W$ an.

$U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle (1,3,0,1), (1,0,0,-1), (-1,3,0,3) \rangle,$

$W = \langle w_1, w_2 \rangle = \langle (0,3,2,2), (0,0,2,0) \rangle.$

<u>dim U:</u> $u_3 = u_1 - 2u_2 \Rightarrow U = \langle u_1, u_2 \rangle.$

u_1, u_2 linear unabhängig $\Rightarrow$ <u>$\dim U = 2$</u>.

<u>dim W:</u> $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, w_1, w_2 linear unabhängig $\Rightarrow$ <u>$\dim W = 2$</u>.

<u>dim$(U \cap W)$:</u> $U \cap W \subset U \Rightarrow \dim(U \cap W) \leq \dim U = 2,$

aber: $\dim(U \cap W) \neq 0$, denn

$0 \neq (0,3,0,2) = u_1 - u_2 = w_1 - w_2 \in U \cap W.$

Und: $\dim(U \cap W) \neq 2$, denn sonst wäre

$U \cap W = U \Rightarrow U = U \cap W \subset W \Rightarrow u_1 \in W$

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}: u_1 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = (0, *, *, *)$, Widerspruch!

Also: <u>$\dim(U \cap W) = 1$</u>.

<u>dim$(U+W)$:</u>

$$\dim(U+W) \underset{\text{VL}}{\overset{}{=}} \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$
$$= 2 + 2 - 1$$
$$= \underline{3}.$$

Name: ....

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Seien U, V und W Vektorräume über dem Körper $\mathbb{F}$, und seien $\alpha : V \to W$ und $\beta : U \to V$ lineare Abbildungen. Zeige:

$$\mathrm{rg}(\alpha \circ \beta) \leqslant \text{Minimum}\,\{\,\mathrm{rg}(\alpha), \mathrm{rg}(\beta)\}.$$

<u>1. Schritt:</u> $\mathrm{rg}(\alpha\circ\beta) \leqslant \mathrm{rg}(\alpha)$:

Es ist $\mathrm{bild}(\alpha\circ\beta) \subset \mathrm{bild}(\alpha)$, denn für $w \in \mathrm{bild}(\alpha\circ\beta)$ gilt:

$$\exists u \in U: \; w = (\alpha\circ\beta)(u) = \alpha(\beta(u))$$

$\Rightarrow$ Mit $v := \beta(u) \in V$ gilt: $w = \alpha(v) \in \mathrm{bild}(\alpha)$.

Es folgt:

$$\mathrm{rg}(\alpha\circ\beta) = \dim \mathrm{bild}(\alpha\circ\beta) \leqslant \dim \mathrm{bild}(\alpha) = \mathrm{rg}(\alpha).$$

<u>2. Schritt:</u> $\mathrm{rg}(\alpha\circ\beta) \leqslant \mathrm{rg}(\beta)$:

Mit dualen Abbildungen $\alpha^*: W^* \longrightarrow V^*$
und $\beta^*: V^* \longrightarrow U^*$ gilt:

$$\mathrm{rg}(\alpha\circ\beta) \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{VL}}}{=} \mathrm{rg}((\alpha\circ\beta)^*) \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{VL}}}{=} \mathrm{rg}(\beta^*\circ\alpha^*)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{1. Schritt}}}{\leqslant} \mathrm{rg}(\beta^*) \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{VL}}}{=} \mathrm{rg}(\beta).$$

(<u>alternativ:</u> $\mathrm{rg}(\alpha\circ\beta) = \dim \mathrm{bild}(\alpha\circ\beta) = \dim \mathrm{bild}(\alpha|_{\mathrm{bild}(\beta)})$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Rangformel}}}{=} \dim \mathrm{bild}(\beta) - \underbrace{\dim \mathrm{kern}(\alpha|_{\mathrm{bild}(\beta)})}_{\geqslant 0} \leqslant \dim \mathrm{bild}(\beta) = \mathrm{rg}(\beta).\;)$$

Insgesamt folgt $\mathrm{rg}(\alpha\circ\beta) \leqslant \text{Minimum}\{\mathrm{rg}(\alpha), \mathrm{rg}(\beta)\}$.

Name: ....

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Sei U der Untervektorraum der ungeraden Polynome in $\mathbb{P}_n$. Bestimme $\dim \mathbb{P}_n/U$.

Fallunterscheidung:

1. Fall: n gerade:

$$U = \langle t, t^3, \dots, t^{n-1} \rangle = \langle \underbrace{t^{2k-1} \mid k = 1, \dots, \tfrac{n}{2}}_{\text{linear unabhängig}} \rangle$$

$$\Rightarrow \dim U = \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow \dim \mathbb{P}_n/U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{VL}}}{=} \dim \mathbb{P}_n - \dim U = n+1-\frac{n}{2} = \frac{n}{2}+1.$$

2. Fall: n ungerade:

$$U = \langle t, t^3, \dots, t^{n} \rangle = \langle \underbrace{t^{2k-1} \mid k = 1, \dots, \tfrac{n+1}{2}}_{\text{linear unabhängig}} \rangle$$

$$\Rightarrow \dim U = \frac{n+1}{2}$$

$$\Rightarrow \dim \mathbb{P}_n/U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{VL}}}{=} \dim \mathbb{P}_n - \dim U = n+1-\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Insgesamt gilt:

$$\dim \mathbb{P}_n/U = \begin{cases} \frac{n}{2}+1, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$