Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. F. W. Knöller
Dr. M. Stemmler

Wintersemester 2010/2011

Zwischenklausur zur Mathematik I

Samstag, den 11.12.2010, 9:30–12:00 Uhr,
Hörsäle 101, 102 und 103, Landgrafenhaus

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter dem Aufgabentext, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Es werden maximal 24 Punkte erwartet, d. h. 24 Punkte entsprechen 100%.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
max. Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	4	36
erreichte Punkte										

Name: ....

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige:

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n < n^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{für alle } n \geqslant 2.$$

Name: ....

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

a) Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

b) Folgere: Für jede Primzahl p mit $p \geqslant 3$ gilt in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$:

$$[1]^3 + [2]^3 + \cdots + [p-1]^3 = [0].$$

Name: ....

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Löse in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ die Gleichungen

$$x^3 - [2] = [0]$$

und

$$x^3 + [2] = [0].$$

Name: ....

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gib für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Lösungsraumes $\mathbb{L}_A$ an.

Name: ....

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Zeige: Zwei Vektoren (x, y) und (x', y') des $\mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn

$$xy' - x'y = 0.$$

Name: ....

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zeige: Die Funktionen

$$x \longmapsto \frac{1}{x+1},$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x+2},$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x+3}$$

sind linear unabhängig in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$.

Name: ....

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Die Untervektorräume $U, W \subset \mathbb{R}^4$ seien gegeben durch

$$\begin{aligned} U &= \big\langle (1,3,0,1), (1,0,0,-1), (-1,3,0,3) \big\rangle, \\ W &= \big\langle (0,3,2,2), (0,0,2,0) \big\rangle. \end{aligned}$$

Gib die Dimensionen von U, W, $U \cap W$ und $U + W$ an.

Name: ....

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Seien U, V und W Vektorräume über dem Körper $\mathbb{F}$, und seien $\alpha : V \to W$ und $\beta : U \to V$ lineare Abbildungen. Zeige:

$$\mathrm{rg}(\alpha \circ \beta) \leqslant \text{Minimum}\left\{ \mathrm{rg}(\alpha), \mathrm{rg}(\beta)\right\}.$$

Name: ....

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Sei U der Untervektorraum der ungeraden Polynome in $\mathbb{P}_n$. Bestimme $\dim \mathbb{P}_n/U$.

Name: ....

Zusatzblatt 1

Name: ....

Zusatzblatt 2

Name: ....

Zusatzblatt 3

Name: ....

Zusatzblatt 4

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. F. W. Knöller
Dr. M. Stemmler

Wintersemester 2010/2011

Zwischenklausur zur Mathematik I

Samstag, den 11.12.2010, 9:30–12:00 Uhr,
Hörsäle 101, 102 und 103, Landgrafenhaus

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige:

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n < n^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{für alle } n \geqslant 2.$$

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

a) Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

b) Folgere: Für jede Primzahl p mit $p \geqslant 3$ gilt in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$:

$$[1]^3 + [2]^3 + \cdots + [p-1]^3 = [0].$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Löse in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ die Gleichungen

$$x^3 - [2] = [0]$$

und

$$x^3 + [2] = [0].$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gib für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Lösungsraumes $\mathbb{L}_A$ an.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Zeige: Zwei Vektoren (x, y) und (x', y') des $\mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn

$$xy' - x'y = 0.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zeige: Die Funktionen

$$x \longmapsto \frac{1}{x+1},$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x+2},$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x+3}$$

sind linear unabhängig in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Die Untervektorräume $U, W \subset \mathbb{R}^4$ seien gegeben durch

$$U = \big\langle (1,3,0,1), (1,0,0,-1), (-1,3,0,3) \big\rangle,$$
$$W = \big\langle (0,3,2,2), (0,0,2,0) \big\rangle.$$

Gib die Dimensionen von U, W, $U \cap W$ und $U + W$ an.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Seien U, V und W Vektorräume über dem Körper $\mathbb{F}$, und seien $\alpha : V \to W$ und $\beta : U \to V$ lineare Abbildungen. Zeige:

$$\operatorname{rg}(\alpha \circ \beta) \leqslant \text{Minimum}\,\big\{ \operatorname{rg}(\alpha), \operatorname{rg}(\beta) \big\}.$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Sei U der Untervektorraum der ungeraden Polynome in $\mathbb{P}_n$. Bestimme $\dim \mathbb{P}_n / U$.