1.2. (1) Mathematik I W.Se 2010/2011 — Lösung Blatt 1

zz: Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a-b \neq 0$ gilt
$$\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

Beweis: Idee: geometrische Summenformel $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q = \frac{b}{a}$.

Fallunterscheidung:

1. Fall: $a = 0$: $\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k = b^n \underset{\substack{\uparrow \\ b \neq 0 \\ n\text{ Vor.}}}{=} \frac{0 - b^{n+1}}{0-b}$.

2. Fall: $a \neq 0$: Dann ist $q := \frac{b}{a} \in \mathbb{R}$ wohldefiniert mit $q \neq 1$ wegen $a - b \neq 0 \Rightarrow a \neq b$.

Mit der geometrischen Summenformel gilt:
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{b}{a}} \quad \Big| \cdot a^n$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k = \frac{a^n - \frac{b^{n+1}}{a}}{1 - \frac{b}{a}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{erw.} \\ \text{mit } a}}{=} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

(2) zz: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$.

Beweis. Induktion nach n:

Sei $I := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right\}$.

<u>IA:</u> $0 \in I$:

$$\sum_{k=1}^{0} k^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{leere Summe}}}{=} 0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot (0+1)(2 \cdot 0 + 1) \checkmark$$

<u>IS:</u> $n \in I \Rightarrow n+1 \in I$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{IV: } n \in I}}{=} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\Big(n(2n+1) + 6(n+1)\Big) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) = \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)$$

$$\Rightarrow n+1 \in I.$$

Nach dem Induktionsprinzip folgt $I = \mathbb{N}$ und damit die Behauptung.

(3) Zz: $\forall x \geq 0, n \in \mathbb{N}$: $(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$.

<u>Beweis:</u> Binomische Formel: Für $n \geq 2$ gilt:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k = \binom{n}{0} 1^n x^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} x^1$$

$$+ \binom{n}{2} 1^{n-2} x^2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \underbrace{x^k}_{\geq 0}}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2.$$

Für $n \in \{0,1\}$ gilt trivialerweise die Gleichheit.

1.3. zz: $2^n \leq n!$ für $n \geq 4$.

<u>Beweis:</u> Induktion nach n:

Sei $I := \{n \geq 4 \mid 2^n \leq n!\}$.

<u>IA.</u> $4 \in I$: $2^4 = 16 \leq 24 = 4!$ ✓

<u>IS:</u> $4 \leq n \in I \Rightarrow n+1 \in I$:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot \underbrace{2}_{\geq 0} \underset{\text{IV: } n \in I}{\leq} \underbrace{n!}_{\geq 0} \cdot 2 \underset{\substack{n \geq 4 \\ \Rightarrow n+1 \geq 5 \geq 2}}{\leq} n! \cdot (n+1) = (n+1)!.$$

Nach dem (verallgemeinerten) Induktionsprinzip folgt $I = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 4\}$ und damit die Behauptung.

1.4. zz: $(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow a = a'$ und $b = b'$.

<u>Beweis:</u> „$\Leftarrow$": klar

„$\Rightarrow$": Es gelte $(a,b) = (a',b')$, d.h. nach Definition:

$$\{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{a'\}, \{a',b'\}\}.$$

Fallunterscheidung:

<u>1. Fall:</u> $a' = b'$: Dann gilt:

$$\{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{a'\}, \{a',b'\}\} = \{\{a'\}, \{a'\}\} = \{\{a'\}\}$$

$\Rightarrow \{a\} \in \{\{a'\}\} \Rightarrow \{a\} = \{a'\}$

$\Rightarrow a \in \{a'\} \Rightarrow a = a'$

und: $\{a,b\} \in \{\{a'\}\} \Rightarrow \{a,b\} = \{a'\}$

$\Rightarrow b \in \{a'\} \Rightarrow b = a' = b'$.

<u>2. Fall:</u> $a' \neq b'$: Dann gilt:

$$\{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{a'\}, \{a',b'\}\}$$

$\Rightarrow \{a\} \in \{\{a'\}, \{a',b'\}\}$

$\Rightarrow \{a\} = \{a'\}$ <u>oder</u> $\{a\} = \{a',b'\}$.

Im zweiten Fall wären $a', b' \in \{a\} \Rightarrow a' = a = b'$, Widerspruch!

Es folgt $\{a\} = \{a'\} \Rightarrow a \in \{a'\} \Rightarrow a = a'$.

Außerdem gilt: $\{a',b'\} \in \{\{a\}, \{a,b\}\}$

$\Rightarrow \{a',b'\} = \{a\}$ <u>oder</u> $\{a',b'\} = \{a,b\}$.

Der erste Fall führt erneut zum Widerspruch.

Also gilt: $\{a', b'\} = \{a, b\}$

$\Rightarrow b' \in \{a, b\} \Rightarrow b' = a$ oder $b' = b$.

Im ersten Fall wäre $b' = a \underset{\text{s.o.}}{=} a'$, Widerspruch!

Es folgt $b' = b$.