Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. F. W. Knöller
Dr. M. Stemmler

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Mathematik I

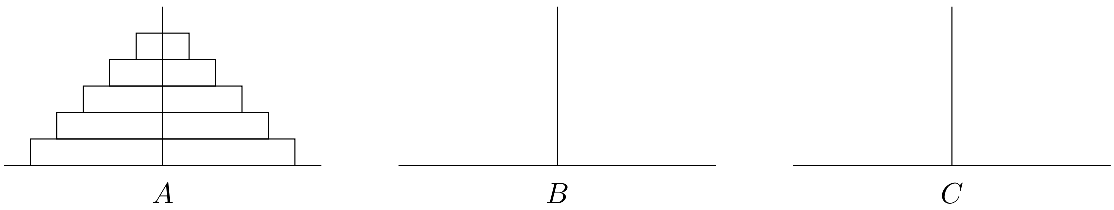
– Blatt 1 –

Abgabe: Freitag, den 29.10.2010, 10:10 Uhr, HG 4

Die mit einem $*$ gekennzeichneten Aufgaben sind mündlich vorzubereiten.

1.1.*

Ein Stapel von n Kreisscheiben mit von unten nach oben abnehmenden Radien soll von A nach C umgeschichtet werden.



Dabei sind folgende Regeln zu beachten:

(1) Bei jedem Schritt wird nur eine Scheibe bewegt.

(2) Es darf niemals eine Scheibe mit größerem Radius auf einer Scheibe mit kleinerem Radius zu liegen kommen.

(3) Alle Plätze A, B, C können benutzt werden.

Mit wievielen Schritten lässt sich die Umschichtung bewerkstelligen? Wieviele Schritte braucht man mindestens?

1.2.

Beweise:

(1) Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a - b \neq 0$, ist

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n.$$

(2) $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

(3) Für $x \geqslant 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $(1+x)^n \geqslant 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}\, x^2.$

bitte wenden!

1.3.

Das Induktionsprinzip lässt sich auf folgende Weise verallgemeinern:
Sei $I \subset \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $n_0 \in I$

(2) $n_0 \leqslant n \in I \Longrightarrow n + 1 \in I$

Dann ist $\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \geqslant n_0\} \subset I$.

Folgere: $2^n \leqslant n!$ für $n \geqslant 4$.

Dabei ist $n!$ für $n \geqslant 0$ rekursiv definiert durch

$$0! := 1, \qquad (n+1)! := (n+1) \cdot n! \quad \text{für } n \geqslant 0.$$

1.4.

Zeige: $(a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow a = a'$ und $b = b'$.

Hinweis: Diskutiere zunächst den Fall $a = b$.