

Mathematik I WiSe 2010/2011 - Lösung Blatt 10

10.2. geg.: $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

ges.: $P \in GL_3(\mathbb{R})$, so dass PAP^{-1} Diagonalgestalt hat.

Eigenwerte von A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)((4-\lambda)(-4-\lambda) + 12) + 6((-1)(-4-\lambda) - 6) - 6((-1)(-6) - 3(4-\lambda))$$

$$= (5-\lambda)(\lambda^2 - 4) + 6(\lambda - 2) - 6(3\lambda - 6)$$

$$= (\lambda - 2)((5-\lambda)(\lambda + 2) + 6 - 18)$$

$$= -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2,$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

Eigenräume von A:

$$E_1: E_1 = \ker(A - 1 \cdot E_3) = \ker \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \cdot (-1) \\ \leftarrow \cdot (-1) \\ \leftarrow \cdot (-1) \end{matrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 4 & -6 & -6 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \cdot (-4) \\ \leftarrow \cdot (-3) \\ \leftarrow \cdot (-3) \end{matrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \cdot \frac{1}{6} \\ \leftarrow \cdot (-3) \\ \leftarrow \cdot (-3) \end{matrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow \cdot 3 \end{array} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Basis von E_1

$$E_2: E_2 = \ker(A - 2 \cdot E_3) = \ker \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 1/3 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-3) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Basis von E_2

Matrix P^{-1} :

Da E_1, E_2 nach VL eine direkte Summe bilden, ist

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A , d.h.

A ist diagonalisierbar. Wähle

$$P^{-1} := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}).$$

Matrix P : Invertiere P^{-1} :

$$(P^{-1} | E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot (-1) \leftarrow \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-3) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1/5 \\ \leftarrow \cdot (-3) \\ + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 & -3/5 & 6/5 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot (-5) \quad \cdot (-2/5) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & -5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & -5 \end{array} \right)$$

Also: $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

Kontrolle:

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 4 \\ 6 & -12 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}$$

10.3. $D^2: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n, f \mapsto f''$.

ges.: Eigenwerte und Eigenvektoren von D^2 .

Eigenwerte: Sei $M(D^2) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ die Matrix von D^2 bzgl. der Basis $(1, t, t^2, \dots, t^n)$ von $\mathbb{P}_n$.

Für $j = 0, 1, \dots, n$ gilt: $D^2(t^j) = j(j-1)t^{j-2}$,
d.h. $M(D^2)$ hat die Gestalt

$$M(D^2) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt: $\chi_{D^2}(\lambda) = \det(M(D^2) - \lambda E_{n+1})$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{obere} \\ \Delta\text{-Matrix}}}{=} (-\lambda)^{n+1} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0,$$

d.h. D^2 hat 0 als einzigen Eigenwert.

Eigenvektoren: Falls $n=0$, ist $D^2(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{P}_n$,
d.h. die Eigenvektoren von D^2 sind alle $f \in \mathbb{P}_0 \setminus \{0\}$.

Falls $n \geq 1$, gilt für $f(t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j \in \mathbb{P}_n \setminus \{0\}$:

$$0 = D^2(f) = \sum_{j=2}^n j(j-1) a_j t^{j-2}$$

$$\Leftrightarrow j(j-1) a_j = 0 \text{ für alle } j = 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow a_j = 0 \text{ für alle } j = 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow f \in \mathbb{P}_1 \setminus \{0\},$$

d.h. die Eigenvektoren von D^2 sind alle $f \in \mathbb{P}_1 \setminus \{0\}$.

10.4. ges.: Zerlegung von $x^2 + x + 1$ in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$.

$$x^2 + x + 1 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1$$

quadratische
Ergänzung

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$$

$$= \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \left(x - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) \left(x - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)$$