Mathematik I WiSe 2010/2011 – Lösung Blatt 11

11.2. geg.: $p(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{C}[x]$.

ges.: Zerlegung von $p(x)$ in Linearfaktoren.

Es ist

$$p(-1) = -1 + 2 - 2 + 1 = 0,$$

d.h. der Linearfaktor $x+1$ lässt sich von $p(x)$ abspalten.

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) : (x+1) = x^2 + x + 1 . \\
\underline{-(x^3 + x^2)} \\
\qquad x^2 + 2x + 1 \\
\qquad \underline{-(x^2 + x)} \\
\qquad\qquad x + 1
\end{array}
$$

Wir erhalten die Zerlegung

$$p(x) = (x+1)(x^2 + x + 1)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Aufgabe} \\ 10.4.}}{=} (x+1)\left(x - \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}\right)\left(x - \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}\right).$$

11.3. geg.: $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Beh.: Es existiert ein $U \in GL_2(\mathbb{C})$, so dass $A_1 := UAU^{-1}$ eine der folgenden Gestalten hat:

(i) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (ii) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

(iii) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, (iv) $\begin{pmatrix} \lambda & b_1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $b_1 \neq 0$.

Beweis: Es ist $\chi_A(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad 2 mit höchstem Koeffizienten $(-1)^2 = 1$. Nach VL (Fundamentalsatz der Algebra) existieren $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit

$$\chi_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2).$$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $\lambda_1 \neq \lambda_2$: Dann gilt für $i \in \{1,2\}$:

$\chi_A(\lambda_i) = 0 \Rightarrow \lambda_i$ Eigenwert von A

$$\Rightarrow 1 \leq \nu_{geom}(\lambda_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{allg. nach VL}}}{\leq} \nu_{alg}(\lambda_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda_1 \neq \lambda_2}}{=} 1$$

$$\Rightarrow \nu_{geom}(\lambda_i) = \nu_{alg}(\lambda_i) \quad (=1).$$

Also ist A diagonalisierbar, d.h. es existiert ein $U \in GL_2(\mathbb{C})$ mit

$$A_1 := UAU^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Damit hat A_1 die Gestalt (ii) (bzw. (i), falls $\lambda_2 = 0$).

<u>2. Fall:</u> $\lambda_1 = \lambda_2$: Dann gilt mit $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2$:

$$\nu_{alg}(\lambda) = 2 = \dim \mathbb{C}^2,$$

d.h. A ist triangulierbar. Also existiert ein $U \in GL_2(\mathbb{C})$ und ein $b_1 \in \mathbb{C}$ mit

$$A_1 := UAU^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & b_1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Damit hat A_1 die Gestalt

(iii), falls $b_1 = 0$,

(iv), falls $b_1 \neq 0$

(bzw. (i), falls $\lambda = b_1 = 0$).

<u>ges.:</u> $\exp(A_1)$.

(i) $$\exp\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Diag. matrix}}{=} \begin{pmatrix} \exp(\lambda) & 0 \\ 0 & \exp(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\lambda) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) $$\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \overset{\text{Diag. matrix}}{=} \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

(iii) $$\exp\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \overset{\text{Diag. matrix}}{=} \begin{pmatrix} \exp(\lambda) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix}.$$

(iv) $$\exp\begin{pmatrix} \lambda & b_1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \exp\left(\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{=:D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:N}\right)$$

$$\underset{\substack{DN = ND \\ (= \lambda N)}}{=} \exp\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \exp\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \exp(\lambda) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\frac{N^k}{k!}}_{= 0 \ \forall k \geq 2} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \exp(\lambda) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\lambda) & b_1 \exp(\lambda) \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix}.$$

11.4. ges.: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

ges.: $U \in GL_3(\mathbb{R})$ mit $UAU^{-1} = D + N$, wobei D diagonal, N nilpotent und $DN = ND$.

Eigenwerte: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$

$$= (3-\lambda)\left((2-\lambda)(-\lambda)+2\right) - \left(2(-\lambda)+2\right) - \left(4 - 2(2-\lambda)\right)$$
$$= (3-\lambda)(2-2\lambda+\lambda^2) - (2-2\lambda) - 2\lambda$$
$$= (3-\lambda)\left((1-\lambda)^2+1\right) - 2$$
$$= (3-\lambda)(1-\lambda)^2 + (1-\lambda)$$
$$= (1-\lambda)\left((3-\lambda)(1-\lambda)+1\right)$$
$$= (1-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2)$$
$$= (1-\lambda)(2-\lambda)^2,$$

d.h. die Eigenwerte von A sind

$\lambda_1 = 1$ mit $\nu_{alg}(\lambda_1) = 1$

und $\lambda_2 = 2$ mit $\nu_{alg}(\lambda_2) = 2$.

Eigen-/Haupträume:

E_{λ_1}: $E_{\lambda_1} = \ker(A - 1\cdot E_3) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\cdot\frac{1}{2}$, $\cdot(-2)$, $+$, $\cdot(-2)$, $+$

$= \ker\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $+$, $\cdot(-\frac{1}{2})$ $= \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{Basis von } E_{\lambda_1}} \right\rangle$.

$\underline{E_{\lambda_2}:}$ $\quad E_{\lambda_2} = \ker(A - 2\cdot E_3) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$= \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{Basis von } E_{\lambda_2}} \right\rangle .$

$\underline{V_{\lambda_2}:}$ (Hauptraum)

$V_{\lambda_2} \underset{\substack{\uparrow \\ \nu_{alg}(\lambda_2) = 2}}{=} \ker(A - 2\cdot E_3)^2 = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$= \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Basis von } V_{\lambda_2}} \right\rangle = \left\langle \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Basis} \\ \text{von } E_{\lambda_2}}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Basis von } V_{\lambda_2}} \right\rangle .$

<u>Trafo-Matrizen:</u>

Wähle

$U^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$

Invertiere U^{-1}:

$(U^{-1} \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{= E_3} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{= U}$$

<u>Matrizen D und N:</u>

$$UAU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=: D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=: N}.$$

Es gilt:

- D diagonal
- N echte obere Dreiecksmatrix $\Rightarrow$ N nilpotent
- $$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND.$$