

## Übungen zur Mathematik I

– Blatt 11 –

Abgabe: Freitag, den 04.02.2011, 10:10 Uhr, HG 4

Die mit einem \* gekennzeichneten Aufgaben sind mündlich vorzubereiten.

### 11.1.\*

Sei  $\pi$  eine Permutation der Ziffern 1, 2, 3 und

$$\alpha_\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die lineare Abbildung

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}).$$

Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\alpha_\pi$ .

### 11.2.

Zerlege das Polynom

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

in Linearfaktoren mit komplexen Koeffizienten.

(Beachte: Ein Polynom 3. Grades mit reellen Koeffizienten hat wenigstens eine reelle Nullstelle!)

### 11.3.

Zeige: Zu jeder komplexen  $2 \times 2$ -Matrix  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  existiert eine invertierbare Matrix  $U \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ , so dass

$$A_1 := UAU^{-1}$$

eine der folgenden Normalformen ist:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ &\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} \lambda & b_1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad b_1 \neq 0 \end{aligned}$$

Bestimme außerdem  $\exp A_1$ .

bitte wenden!

**11.4.**

Finde zu der reellen  $3 \times 3$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

eine invertierbare  $3 \times 3$ -Matrix  $U \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ , so dass

$$UAU^{-1} = D + N$$

mit  $D$  diagonal,  $N$  nilpotent und  $D \cdot N = N \cdot D$ .