Mathematik I WiSe 2010/2011 — Lösung Blatt 2

2.2. $X_1, \ldots, X_n \subset X$ mit

(1) $X_i \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

(2) $X_i \cap X_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j$

(3) $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$

Für $x, y \in X$: $x \sim y :\Longleftrightarrow \exists i \in \{1, \ldots, n\} : x, y \in X_i$.

Beh.: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf X.

Beweis:

- Reflexivität: Sei $x \in X$.
  Nach (3) ex. ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x \in X_i$, d.h. $x \sim x$.
- Symmetrie: Seien $x, y \in X$ mit $x \sim y$.
  Dann ex. ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x, y \in X_i$,
  d.h. $y, x \in X_i$, also $y \sim x$.
- Transitivität: Seien $x, y, z \in X$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$.
  Dann ex. $i, j \in \{1, \ldots, n\}$: $x, y \in X_i$, $y, z \in X_j$.
  Aus $y \in X_i$, $y \in X_j$ folgt $y \in X_i \cap X_j \Rightarrow X_i \cap X_j \neq \emptyset$.
  Mit (2) folgt dann $i = j$, d.h. $x, z \in X_i$,
  also $x \sim z$.

Damit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X.

ges.: Äquivalenzklasse $[x]$ für $x \in X$.

Nach (2), (3) ex genau ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $x \in X_i$.

Wir zeigen: $[x] = X_i$.

„$\supset$": Für $y \in X_i$ gilt: $x, y \in X_i \Rightarrow x \sim y \Rightarrow y \in [x]$

„$\subset$": Für $y \in [x]$ gilt:

$x \sim y \Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, n\}: x, y \in X_j$

$\Longrightarrow x \in X_i \cap X_j \overset{(2)}{\Longrightarrow} i = j$

$\Longrightarrow y \in X_i$.

ges.: Quotient $X/\sim$.

Beh.: $X/\sim = \{X_1, \dots, X_n\}$.

Beweis:

„$\subset$": $C \in X/\sim \;\Longrightarrow\; \exists x \in X: C = [x]$

$\underset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} \exists i \in \{1, \dots, n\}: C = X_i \in \{X_1, \dots, X_n\}$.

„$\supset$": Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig.

Nach (1) ist $X_i \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \exists x \in X_i \Longrightarrow X/\sim \ni [x] \overset{\text{s.o.}}{=} X_i$.

2.3.

In $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ gilt:

- $-[3] = [-3] \overset{-3 \equiv 2 \bmod 5}{=} [2]$

- $[3] \cdot [2] = [6] \underset{6 \equiv 1 \bmod 5}{=} [1] \Rightarrow [3]^{-1} = [2]$

In $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ gilt:

- $-[3] = [-3] \overset{-3 \equiv 4 \bmod 7}{=} [4]$

- $[3] \cdot [5] = [15] \underset{15 \equiv 1 \bmod 7}{=} [1] \Rightarrow [3]^{-1} = [5]$

In $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ gilt:

- $-[3] = [-3] \overset{-3 \equiv 8 \bmod 11}{=} [8]$

- $[3] \cdot [4] = [12] \underset{12 \equiv 1 \bmod 11}{=} [1] \Rightarrow [3]^{-1} = [4]$

2.4. Sei $(a_1, \dots, a_{10}) \in ISBN$, $(b_1, \dots, b_{10}) \in \mathbb{N}^{10}$

mit $0 \leq b_1, \dots, b_9 \leq 9$, $0 \leq b_{10} \leq 10$.

a) Gelte $a_i = b_i \ \forall i \in \{1, \dots, 10\} \setminus \{j\}$ und $a_j \neq b_j$.

Beh.: $(b_1, \dots, b_{10}) \notin ISBN$.

Beweis: $\lightning$ $(b_1 \dots b_{10}) \in ISBN$

$\Rightarrow$ In $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ gilt:

$$\left[\sum_{i=1}^{10} (11-i) a_i\right] = [0] = \left[\sum_{i=1}^{10} (11-i) b_i\right]$$

$$\Rightarrow [0] = \left[\sum_{i=1}^{10} (11-i) \underbrace{(a_i - b_i)}_{= 0 \ \forall i \neq j}\right] = \underbrace{[11-j]}_{\neq [0]} \cdot [a_j - b_j]$$

$\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ Körper

$$\Rightarrow [\underbrace{a_j - b_j}_{\in \{-10, \dots, 10\}}] = [0] \Rightarrow a_j - b_j = 0 \Rightarrow a_j = b_j \ \lightning$$

$\Rightarrow (b_1, \dots, b_{10}) \notin ISBN$.

b) Gelte $j \neq k$, $a_j \neq a_k$, $a_j = b_k$, $a_k = b_j$

und $a_i = b_i \ \forall i \in \{1, \dots, 10\} \setminus \{j, k\}$.

Beh.: $(b_1, \dots, b_{10}) \notin ISBN$.

Beweis: $\lightning$ $(b_1, \dots, b_{10}) \in ISBN$

$$\xrightarrow[\text{oben}]{\text{wie}} [0] = \left[\sum_{i=1}^{10} (11-i) \underbrace{(a_i - b_i)}_{= 0 \ \forall i \neq j, k}\right]$$

$$= [(11-j)(a_j - \underbrace{b_j}_{=a_k}) + (11-k)(a_k - \underbrace{b_k}_{=a_j})]$$

$$= [j-k] \cdot [a_k - a_j]$$

$$\underset{\underset{\text{Körper}}{\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}}}{\Longrightarrow} \quad [\underbrace{j-k}_{\in \{-9,\dots,9\}}] = [0] \quad \underline{\text{oder}} \quad [\underbrace{a_k - a_j}_{\in \{-10,\dots,10\}}] = [0]$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$j = k \ \lightning \qquad\qquad a_k = a_j \ \lightning$$

$$\Rightarrow (b_1, \dots, b_{10}) \notin ISBN.$$

c) Sei $(a_1, \dots, a_{10}) \in ISBN$ die zugehörige ISBN-Nummer und $(b_1, \dots, b_{10}) = (0, 6, 6, 9, 6, 3, 9, 2, 5, 4)$ die gegebene Nummer. Es gelten die Voraussetzungen von b) mit $2 \leq j \leq 8$, $k = j+1$.

Es gilt:

$$\left[\sum_{i=1}^{10}(11-i)\,a_i\right] = [0], \quad \left[\sum_{i=1}^{10}(11-i)\,b_i\right] \underset{\text{ausrechnen}}{=} [236] = [5]$$

$$\Rightarrow [5] = \left[\sum_{i=1}^{10}(11-i)\,b_i\right] - \left[\sum_{i=1}^{10}(11-i)\,a_i\right]$$

$$\underset{\text{wie oben}}{=} [k-j] \cdot [b_j - b_k] \underset{k=j+1}{=} [b_j - b_{j+1}]$$

$$(\Rightarrow b_j - b_{j+1} = 5 \mod 11)$$

Ausrechnen:

j	2	3	4	5	6	7	8
$[b_j - b_{j+1}]$	$[0]$	$[8]$	$[9]$	$[8]$	$\underline{\underline{[5]}}$	$[7]$	$[8]$

$\Longrightarrow \quad j = 6 \,, \quad k = 7 .$

Die gesuchte ISBN-Nummer ist

$$0 - 669 - 0\underline{\underline{93}}25 - 4 .$$